MATEMATIKA EKONOMI

Sri Murwati, SE., M.M.
Dr.Dra.Erma Setiawati,MM,Ak,CA
Eskasari Putri,S.E.,M.Si.,Akt
Dimas Ilham Nur Rois, SE., M.Ak

FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SURAKARTA
2022

MATEMATIKA EKONOMI

Oleh :

Sri Murwati, SE., M.M.

Dr. Dra. Erma Setiawati., MM, Ak, CA

Eskasari Putri, SE., M.Si., Akt

Dimas Ilham Nur Rois, SE., M.Ak

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Dengan mengucapkan syukur alhamdulillah atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan peyusunan buku yang berjudul Matematika Ekonomi. Shalawat dan salam tak lupa diucapkan kepada Nabi Muhammad SAW suri toladan umat islam yang telah mengajarkan kesabaran dan kedisiplinan sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan buku ini dengan rasa senang, tenang dan sesuai dengan target yang diinginkan.

Tersusunnya buku ini tentu bukan hanya dari usaha penulis seorang. Dukungan moral dan material dari berbagai pihak sangatlah membantu tersusunnya buku ini. Untuk itu, penulis ucapkan terimakasih kepada keluarga, sahabat, rekan-rekan dan pihak-pihak lainnya yang membantu secara moral dan material sehingga tersusunnya buku ini.

Buku ini menjelaskan tentang matematika dasar terlebih dahulu yang kemudian diaplikasikan dalam ekonomi. Materi matematika dasar pada buku ini terdiri dari fungsi, diferensial, integral dan matriks. Materi dasar tersebut diaplikasikan pada ilmu ekonomi terdiri dari aplikasi fungsi linier, maksimum dan minimum pada fungsi, aplikasi diferensial dan integral serta aplikasi matriks dalam ekonomi.

Buku yang tersusun ini tentu masih jauh dari kata sempurna. Untuk itu, kritik dan saran yang membanngun sangat diperlukan agar buku ini bisa lebih baik lagi nantinya.

Surakarta, 23 Agustus 2021

Penulis

RINGKASAN

Buku ini menjelasakan dasar matematika ekonomi hingga pengaplikasian matematika dalam ekonomi. Mengetahui dasar matematika ekonomi dapat mempermudah pemahaman untuk mengaplikasian matematika dalam ekonomi. Materi dasar matematika terdiri dari fungsi, diferensial, integral dan matriks.

Fungsi dapat diaplikasikan dalam ekonomi untuk menentukan fungsi permintaan, fungsi penawaran, keseimbangan pasar, dampak perpajakan dan subsidi terhadap fungsi penawaran dan keseimbangan pasar. Aplikasi fungsi linier dapat digunakan untuk menghitung berapa pajak yang ditanggung oleh penjual, pembeli dan yang diterima oleh pemerintah. Selain itu dapat juga digunakan untuk perhitungan pembagian subsidi yang diberikan oleh pemerintah kepada produsen dan yang dibagikan oleh produsen ke konsumen. Aplikasi fungsi juga menjelaskan cara menggambar grafik fungsi permintaan, fungsi penawaran sebelum dan sesudah pajak/subsidi dan keseimbangan pasarnya.

Diferensial dapat diaplikasikan dalam ekonomi untuk menentukan titik maksimum, minimum dan titik belok suatu fungsi. Diferensial juga dapat digunakan untuk menentukan elastisitas silang, harga dan pendapatan serta dapat digunakan untuk menganalisis keuntungan maksimum pada pasar persaingan murni maupun pasar monopoli.

Matriks dapat digunakan untuk melakukan analisis Input-output, menyelesaikan sistem persamaan linier dan penentuan titik keseimbangan sasar. Analisis input-output dapat digunakan untuk mengamati struktur perekonomian yang saling berkaitan antara sektor ekonomi. Setiap industri memerlukan input dari industri lainnya untuk menghasilkan output. Output tersebut juga diperlukan oleh indutri lainnya sebagai input untuk menghasilkan output.

Buku ini juga dilengkapi dengan contoh soal maupun tugas-tugas setiap BAB. Hal ini diharapkan supaya lebih mudah difahami dan banyak berlatih dalam menyelesaiakan soal latihan.

Surakarta, 23 Agustus 2021

Penulis

DAFTAR ISI

BAB 1
FUNGSI

A. PENGERTIAN FUNGSI

Fungsi adalah hubungan ketergantungan antara satu variabel dengan variabel lain yang saling mempengaruhi.

$$y = f(x) \rightarrow y = a\,x + b$$
$$x = f(y) \rightarrow x = b - a\,y$$

Variabel adalah suatu besaran yang nilainya berubah-ubah dan saling mempengaruhi.

$$y = f(x) \rightarrow y = a\,x + b$$

y: **Variabel Dependen** adalah variabel yang besarnya tergantung dengan variabel independen

x: **Variabel Independen** adalah variabel yang besarnya sembarang atau tidak tergantung dengan variabel lain

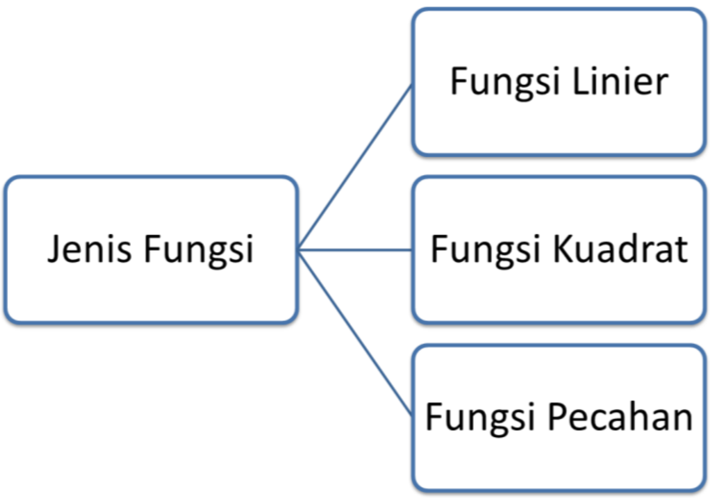
b: **Konstanta** adalah bilangan yang berdiri sendiri dalam suatu fungsi dengan nilai tetap.

a: **Koefisien** adalah bilangan yang terkait dan terletak di depan variabel independen.

- Contoh :

1. $y = 3x + 9$
2. $y = 9 - 3x$
3. $y = x^2 + 4x - 32$
4. $x = y^2 + 4y + 4$
5. $y = \frac{2x+10}{x+4}$

B. JENIS-JENIS FUNGSI



B.1. FUNGSI LINIER

Fungsi linier adalah fungsi garis lurus dimana hanya memiliki satu variabel independen dan berpangkat satu.

$$y = f(x) \rightarrow y = b\,x + a$$
$$x = f(y) \rightarrow x = a - b\,y$$

Grafik fungsi linier apabila digambarkan akan berbentuk garis lurus.

- Grafik Fungsi Linier

Cara menggambar grafik fungsi linier dapat dilakukan dengan cara :

1. Menggunakan bantuan tabel
2. Menggunakan ciri matematis yaitu memperhatikan titik potong sumbu x dan sumbu y.

1. Cara menggambar grafik fungsi linier dengan bantuan tabel.

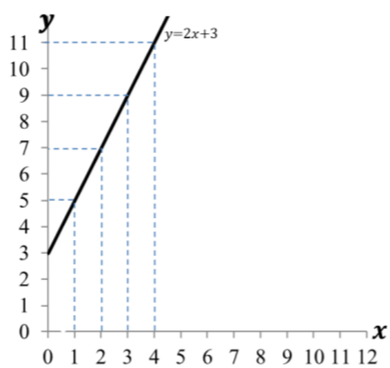
Contoh : $y = 2x + 3$

x	0	1	2	3	4
y	3	5	7	9	11

$*y = 2x + 3$

$= 2 \text{ x } 0 + 3 = 3$

x	0	1	2	3	4
y	3	6	8	10	12



2. Cara menggambar grafik dengan ciri matematis.

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

Artinya grafik fungsi linier akan memotong sumbu y pada saat $x = 0$

Koordinat titik potong dengan sumbu y adalah :

$$y = b + ax$$
$$y = b + a(0)$$
$$y = b$$

Jadi koordinat titik potong sumbu y $(0; b)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

Artinya grafik fungsi linier akan memotong sumbu x pada saat $y = 0$

Koordinat titik potong dengan sumbu x adalah :

$$y \quad = b + ax$$
$$0 \quad = b + ax$$
$$ax = -b$$
$$x \quad = \frac{-b}{a}$$

Jadi koordinat titik potong sumbu y $(0; \frac{-b}{a})$

c. Koefisien arah adalah angka perbandingan dari perubahan x dengan perubahan y. Koefisien arah menunjukkan arah pergerakan grafik. Apabila koefisien dari fungsi linier bernilai :

- Positif $(+a)$ maka grafik fungsi linier akan bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dengan perubahan sebesar b satuan
- Negatif $(-a)$ maka grafik fungsi linier akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah dengan perubahan sebesar b satuan.

---

1. $y = 6 - 3x$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$y = 6 - 3(0)$

$y = 6 - 0$

$y = 6$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: A$(0; 6)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

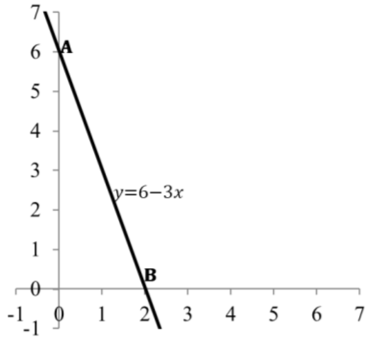
$0 = 6 - 3x$

$3x = 6$

$x = 2$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: B$(2; 0)$

c. Koefisien arah -3 (negatif), artinya grafik fungsi linier akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah dengan perubahan sebesar 3 satuan.



2. $y = 3x + 6$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$y = 6 - 3(0)$

$y = 6 - 0$

$y = 6$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: A$(0; 6)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

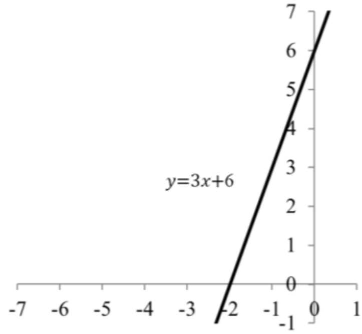
$0 = 3x + 6$

$3x = -6$

$x = -2$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: B$(-2; 0)$

c. Koefisien arah 3 (positif), artinya grafik fungsi linier akan bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dengan perubahan sebesar 3 satuan.



3. $x = 3y + 6$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$0 = 3y + 6$

$3y = -6$

$y = -2$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: $(0; -2)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

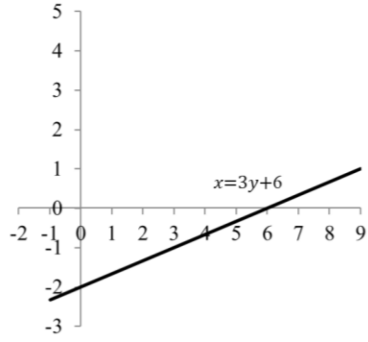
$x = 3(0) + 6$

$x = 0 + 6$

$x = 6$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: $\mathrm{B}(6; 0)$

c. Koefisien arah 3 (positif), artinya grafik fungsi linier akan bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dengan perubahan sebesar 3 satuan.



3. $x = 6 - 3y$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$0 = 3y + 6$

$3y = 6$

$y = 2$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: $(0; 2)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

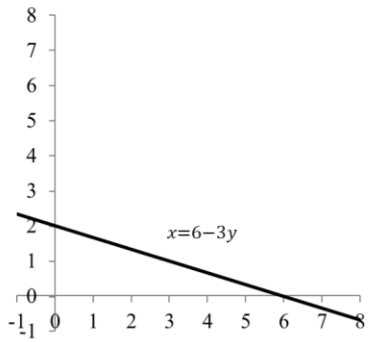
$x = 6 - 3(0)$

$x = 6 - 0$

$x = 6$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: $\mathrm{B}(6; 0)$

c. Koefisien arah -3 (negatif), artinya grafik fungsi linier akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah dengan perubahan sebesar 3 satuan.



B.2. FUNGSI KUADRAT

Fungsi kuadrat adalah fungsi non linier (garis tidak lurus) yang variabel independennya berpangkat dua.

$$y = f(x) \rightarrow y = ax^2 + bx + c$$
$$x = f(y) \rightarrow x = ay^2 + by + c$$

Grafik fungsi kuadrat apabila digambarkan akan berupa garis tidak lurus yang berbentuk parabola.

Persamaan 1	Persamaan 2
$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
c = konstanta a, b = koefisien x = variabel independe y = variabel dependen	c = konstanta a, b = koefisien y = variabel independe x = variabel dependen

- Perbedaan kedua persamaan tersebut adalah :
- Grafik persamaan 1 akan berbentuk parabola dengan arah membuka keatas atau membuka kebawah.

  Koefisien positif $\rightarrow$ membuka keatas

  Koefisien negatif $\rightarrow$ membuka kebawah
- Grafik persamaan 2 akan berbentuk parabola dengan arah membuka kesamping kanan atau kesamping kiri

  Koefisien positif $\rightarrow$ membuka kesamping kanan

  Koefisien negatif $\rightarrow$ membuka kesamping kiri

Grafik Fungsi Kuadrat

Cara menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan cara :

1. Menggunakan bantuan tabel, hampir sama dengan menggambar fungsi linier
2. Menggunakan ciri matematis yaitu memperhatikan titik potong sumbu x dan sumbu y.

2. Cara menggambar grafik dengan ciri matematis.

Persamaan 1	**Persamaan 2**
$y = ax^2 + bx + c$	$x = ay^2 + by + c$
a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$ $y = a(0^2) + b(0) + c$ $y = 0 + 0 + c$ $y = c$ Jadi koordinat titik potong sumbu y $(0; c)$	a. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$ $x = a(0^2) + b(0) + c$ $x = 0 + 0 + c$ $x = c$ Jadi koordinat titik potong sumbu y $(c; 0)$

b. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$ $0 = ax^2 + bx + c$	b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$ $0 = ay^2 + by + c$
Mencari nikai Diskriminannya $D = b^2 - 4ac$ Ada 3 kemungkinan setelah dicari nilai diskriminannya.	

1. Jika $D > 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut akan memotong sumbu x di 2 titik (2 titik potong) Koordinat titik potong : $x_1 x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x: $\left(\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; 0\right)$	1. Jika $D > 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut akan memotong sumbu y di 2 titik (2 titik potong) Koordinat titik potong : $y_1 y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $y_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ $y_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y: $\left(0; \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\right)$

2.Jika $D = 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut hanya menyinggung sumbu x (1 titik potong) Koordinat titik singgung : $x_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $x_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $x_1x_2 = \frac{-b \pm 0}{2a}$ $x_1x_2 = \frac{-b}{2a}$ Jadi koordinat titik singgung dengan sumbu x: $\left(\frac{-b}{2a}; 0\right)$	2.Jika $D = 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut hanya menyinggung sumbu y (1 titik potong) Koordinat titik singgung : $y_1y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $y_1y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $y_1y_2 = \frac{-b \pm 0}{2a}$ $y_1y_2 = \frac{-b}{2a}$ Jadi koordinat titik singgung dengan sumbu y: $\left(0; \frac{-b}{2a}\right)$

3.Jika $D < 0$ maka grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu x (tidak ada titik potong) Karena tidak memotong maka tidak perlu mencari koordinat titik potongnya.	3.Jika $D < 0$ maka grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu y (tidak ada titik potong) Karena tidak memotong maka tidak perlu mencari koordinat titik potongnya.

c. Titik puncak (titik stasioner) adalah titik balik dari fungsi kuadrat tersebut. Koordinat titik puncak : $x = \frac{-b}{2a}$ $y = \frac{-D}{4a}$ Jadi Koordinat titik puncak $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right)$	c. Titik puncak (titik stasioner) adalah titik balik dari fungsi kuadrat tersebut. Koordinat titik puncak : $x = \frac{-D}{4a}$ $y = \frac{-b}{2a}$ Jadi Koordinat titik puncak $\left(\frac{-D}{4a}; \frac{-b}{2a}\right)$
d. Persamaan Sumbu Simetri adalah garis yang membelah parabola menjadi 2 bagian sama besar. Persamaan sumbu simetri: $x = \frac{-b}{2a}$	d. Persamaan Sumbu Simetri adalah garis yang membelah parabola menjadi 2 bagian sama besar. Persamaan sumbu simetri: $y = \frac{-b}{2a}$

Contoh Soal

1. $y = x^2 - 6x + 8$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$y = x^2 - 6x + 8$

$y = (0)^2 - 6(0) + 8$

$y = 8$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah : A$(0; 8)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$y = x^2 - 6x + 8$

$0 = x^2 - 6x + 8$

Nilai determinannya : $D = b^2 - 4ac$

$$D = (-6)^2 - 4(1)(8)$$

$$= 36 - 32$$

$$= 4$$

Nilai $D > 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut akan memotong sumbu x di 2 titik.

- Koordinat titik potong

$$x_1 x_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$

$$x_1 x_2 = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} \qquad x_2 = \frac{6-2}{2}$$

$$x_1 = \frac{8}{2} \qquad x_2 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 2$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah :B(4;0) dan C (2;0)

c. Titik Puncak

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad y = \frac{-D}{4a}$$

$$x = \frac{-(-6)}{2(1)} \qquad y = \frac{-4}{4(1)}$$

$$x = 3 \qquad y = -1$$

Jadi koordinat titik puncaknya : P $(3; -1)$

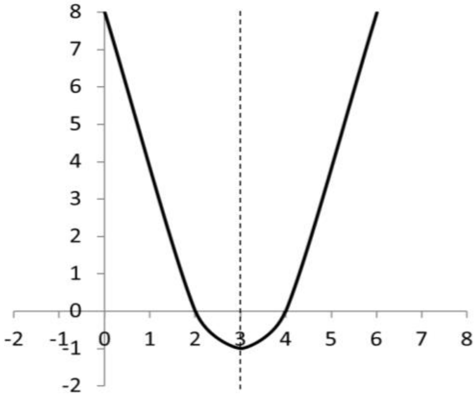
d. Persamaan Sumbu Simetri

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

Jadi persamaan sumbu simetri $x = 3$

Grafik $y = x^2 - 6x + 8$



2. $y = x^2 - 6x + 9$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$y = x^2 - 6x + 9$

$y = (0)^2 - 6(0) + 9$

$y = 9$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah : A(0; 9)

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$y = x^2 - 6x + 9$

$0 = x^2 - 6x + 9$

Nilai determinannya : $D = b^2 - 4ac$

$D = (-6)^2 - 4(1)(9)$

$= 36 - 36$

$= 0$

Nilai $D = 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut hanya menyinggung sumbu x.

- Koordinat titik potong

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

$x_1 = x_2 = \frac{-(-6)}{2(1)}$

$x_1 = x_2 = \frac{6}{2}$

$x_1 = x_2 = 3$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah B(3;0)

c. Titik Puncak

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad y = \frac{-D}{4a}$$

$$x = \frac{-(-6)}{2(1)} \qquad\qquad y = \frac{-0}{4(1)}$$

$$x = 3 \qquad\qquad y = 0$$

Jadi koordinat titik puncaknya : P (3;0)

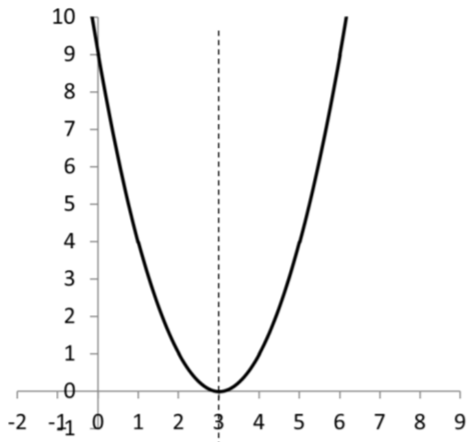
d. Persamaan Sumbu Simetri

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6)}{2} = 3$$

Jadi persamaan sumbu simetri $x = 3$

Grafik$y = x^2 - 6x + 9$



3. $y = -2x^2 + 6x - 5$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$y = -2x^2 + 6x - 5$

$y = -2(0)^2 + 6(0) - 5$

$y = -5$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah : A$(0; -5)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$y = -2x^2 + 6x - 5$

$0 = -2x^2 + 6x - 5$

Nilai determinannya : $D = b^2 - 4ac$

$D = (6)^2 - 4(-2)(-5)$

$= 36 - 40 = -4$

Nilai $D < 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut tidak memotong sumbu x , maka tidak perlu mencari koordinat titik potongnya.

c. Titik Puncak

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad y = \frac{-(D)}{4a}$$

$$x = \frac{-6}{2(-2)} \qquad\qquad y = \frac{-(-4)}{4(-2)}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \qquad\qquad y = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Jadi koordinat titik puncaknya : P $(1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

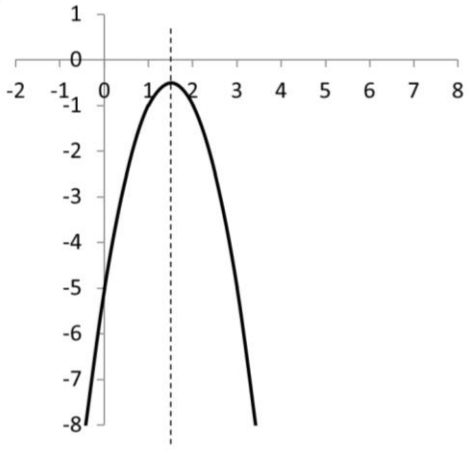
d. Persamaan Sumbu Simetri

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-6}{2(-2)} = 1\frac{1}{2}$$

Jadi persamaan sumbu simetri $x = 1\frac{1}{2}$

Grafik $y = -2x^2 + 6x - 5$



4. $x = -y^2 - 3y + 4$

a. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$x = -y^2 - 3y + 4$

$x = -(0)^2 - 3(0) + 4$

$x = 4$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah : A(4; 0)

b. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$x = -y^2 - 3y + 4$

$0 = -y^2 - 3y + 4$

Nilai determinannya : $D = b^2 - 4ac$

$D = (-3)^2 - 4(-1)(4)$

$= 9 + 16$

$= 25$

Nilai $D > 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut akan memotong sumbu y di 2 titik.

- Koordinat titik potong

$$y_1 y_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(-1)}$$

$$y_1 y_2 = \frac{3 \pm 5}{-2}$$

$$y_1 = \frac{3+5}{-2} \qquad y_2 = \frac{3-5}{-2}$$

$$y_1 = \frac{8}{-2} \qquad y_2 = \frac{-2}{-2}$$

$$y_1 = -4 \qquad y_2 = 1$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y adalah :B(0;-4) dan C (0;1)

c. Titik Puncak

$$x = \frac{-D}{4a} \qquad y = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-25}{4(-1)} \qquad y = \frac{-(-3)}{2(-1)}$$

$$x = 6\frac{1}{4} \qquad y = -1\frac{1}{2}$$

Jadi koordinat titik puncaknya : P $(6\frac{1}{4}; -1\frac{1}{2})$

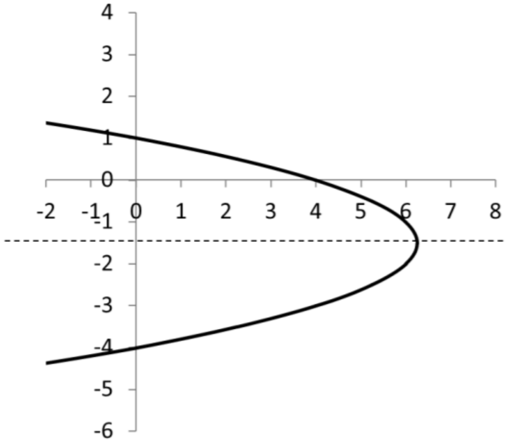
d. Persamaan Sumbu Simetri

$$y = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-(-3)}{2(-1)} = -1\frac{1}{2}$$

Jadi persamaan sumbu simetri y= $-1\frac{1}{2}$

Grafik $x = -y^2 - 3y + 4$



5. $x = y^2 + 4y + 4$

a. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$x = y^2 + 4y + 4$$

$$x = (0)^2 + 4(0) + 4$$

$$x = 4$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah : A(4; 0)

b. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$x = y^2 + 4y + 4$

$0 = y^2 + 4y + 4$

Nilai determinannya : $D = b^2 - 4ac$

$$D = (4)^2 - 4(1)(4)$$
$$= 16 - 16$$
$$= 0$$

Nilai $D = 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut hanya menyinggung sumbu y.

- Koordinat titik singgung

$y_1 = y_2 = \frac{-b}{2(a)}$

$y_1 = y_2 = \frac{-4}{2(1)}$

$y_1 = y_2 = \frac{-4}{2}$

$y_1 = y_2 = -2$

Jadi koordinat titik singgung dengan sumbu y adalah P$(0; -2)$

c. Titik Puncak

$$x = \frac{-D}{4a} \qquad\qquad y = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-36}{4(-1)} \qquad\qquad y = \frac{-(-2)}{2(-1)}$$

$$x = 9 \qquad\qquad y = \frac{2}{-2} = -1$$

Jadi koordinat titik puncaknya : P $(9; -1)$

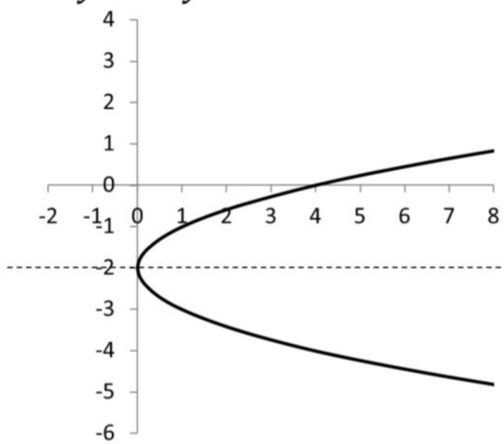
d. Persamaan Sumbu Simetri

$$y = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1$$

Jadi persamaan sumbu simetri y= -1

Grafik$x = y^2 + 4y + 4$



6. $x = y^2 - 4y + 5$

a. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$x = y^2 - 4y + 5$

$x = (0)^2 - 4(0) + 5$

$x = 5$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah : A(5; 0)

b. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$x = y^2 - 4y + 5$

$0 = y^2 - 4y + 5$

Nilai determinannya : $D = b^2 - 4ac$

$$D = (-4)^2 - 4(1)(5)$$

$$= 16 - 20 = -4$$

Nilai $D < 0$ maka grafik fungsi kuadrat tersebut tidak memotong sumbu y , maka tidak perlu mencari koordinat titik potongnya.

c. Titik Puncak

$$x = \frac{-D}{4a} \qquad y = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4)}{4(1)} \qquad y = \frac{-(-4)}{2(1)}$$

$$x = 1 \qquad y = 2$$

Jadi koordinat titik puncaknya : P (1;2)

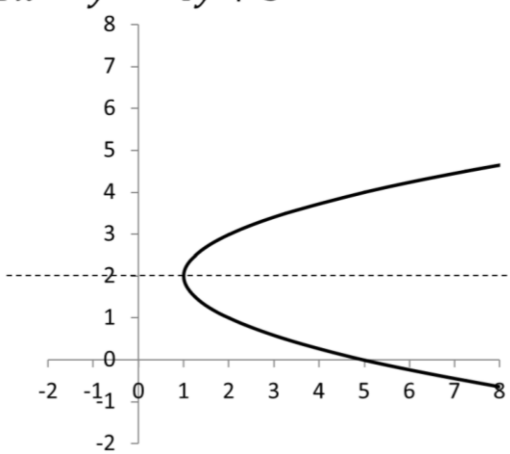
d. Persamaan Sumbu Simetri

$$y = \frac{-b}{2a}$$

$$y = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$$

Jadi persamaan sumbu simetri y= 2

Grafik $x = y^2 - 4y + 5$



B.3. FUNGSI PECAH

Fungsi pecah adalah suatu fungsi non linier (tidak lurus) dimana variabel bebasnya merupakan penyebut.

$$y = f(x) \rightarrow y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Dimana : $a, c =$ koefisien $b, d =$ konstanta

$$y = \text{Var. Dependen } x = \text{Var. Independen}$$

Grafik fungsi pecah apabila digambarkan akan berupa garis tidak lurus yang berbentuk hiperbola. Menggambar fungsi pecah menggunakan ciri matematis yang memerlukan bantuan tabel.

Ciri Matematis

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$y = \frac{a(0)+b}{c(0)+d}$

$y = \frac{0+b}{0+d}$

$y = \frac{b}{d}$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu y $(0; \frac{b}{d})$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$0 = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$0 = ax + b$$

$$-ax = b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu $x(-\frac{b}{a}; 0)$

Ciri khusus fungsi pecah adalah **asimtot.** Asimtot adalah suatu garis lurus yang tidak akan dipotong/dilalui oleh garis lengkung, tetapi didekati sampai titik tak terhingga untuk sumbu x dan y.

- Asimtot pada fungsi pecah ada dua :

1. Asimtot datar adalah suatu garis lurus yang sejajar dengan sumbu x, yang tidak akan dipotong, akan tetapi didekati oleh fungsi pecah (hiperbola) sampai pada titik dimana nilai x adalah $\sim$.
2. Asimtot tegak adalah suatu garis lurus yang sejajar dengan sumbu y, yang tidak akan dipotong, akan tetapi didekati oleh fungsi pecah (hiperbola) sampai pada titik dimana nilai y adalah $\sim$.

c. Persamaan garis asimtot datar $\rightarrow x = \sim$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$y = \frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}$$

$$y = \frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}$$

$$y = \frac{a+\frac{b}{\sim}}{c+\frac{d}{\sim}}$$

$$y = \frac{a+0}{c+0}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{a}{c}}$$

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah $y = \frac{a}{c}$

d. Persamaan garis asimtot tegak → $y = \sim$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$
$$\sim = \frac{ax+b}{cx+d}$$
$$\sim(cx+d) = ax+b$$

$$cx + d = \frac{ax+b}{\sim}$$
$$cx + d = 0$$
$$cx = -d$$
$$\boldsymbol{x = \frac{-d}{c}}$$

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah $x = \frac{-d}{c}$

Contoh :

1. $\frac{2x+6}{x+2}$

a. Titik potong dengan sumbu $y \to x = 0$

$$y = \frac{2(0)+6}{(0)+2}$$
$$y = \frac{0+6}{0+2}$$
$$y = \frac{6}{2}$$
$$y = 3$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu $y(0; 3)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$y = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$0 = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$0 = 2x + 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu $x(-3; 0)$

c. Persamaan garis asimtot datar $\rightarrow x = \sim$

$$y = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$y = \frac{\frac{2x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}$$

$$y = \frac{2+\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

$$y = \frac{2+\frac{6}{\sim}}{1+\frac{2}{\sim}}$$

$$y = \frac{2+0}{1+0}$$

$$y = \frac{2}{1}$$

$$y = 2$$

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah $y = 2$

d. Persamaan garis asimtot tegak $\rightarrow y = \sim$

$$y = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$\sim = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$\sim(x+2) = 2x+6$$

$$x + 2 = \frac{2x+6}{\sim}$$

$$x + 2 = 0$$

$$\boldsymbol{x = -2}$$

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah $x = -2$

Contoh :

1. $\frac{2x+6}{x+2}$

a. Titik potong dengan sumbu $y \rightarrow x = 0$

$$y = \frac{2(0)+6}{(0)+2}$$

$$y = \frac{0+6}{0+2}$$

$$y = \frac{6}{2}$$

$$y = 3$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu $y(0; 3)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \to y = 0$

$$y = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$0 = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$0 = 2x + 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu $x(-3; 0)$

c. Persamaan garis asimtot datar $\to x = \sim$

$$y = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$y = \frac{\frac{2x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}$$

$$y = \frac{2+\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

$$y = \frac{2+\frac{6}{\sim}}{1+\frac{2}{\sim}}$$

$$y = \frac{2+0}{1+0}$$

$$y = \frac{2}{1}$$

$$y = 2$$

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah $y = 2$

c. Persamaan garis asimtot datar → $x = \sim$

$$y = \frac{2x+6}{x+2}$$

$$y = \frac{\frac{2x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}$$

$$y = \frac{2+\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

$$y = \frac{2+\frac{6}{\sim}}{1+\frac{2}{\sim}}$$

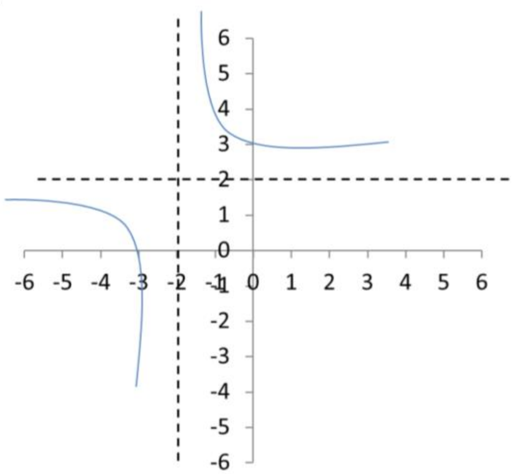
$$y = \frac{2+0}{1+0}$$

$$y = \frac{2}{1}$$

$$y = 2$$

Jadi persamaan garis asimtot datar adalah $y = 2$

Grafik

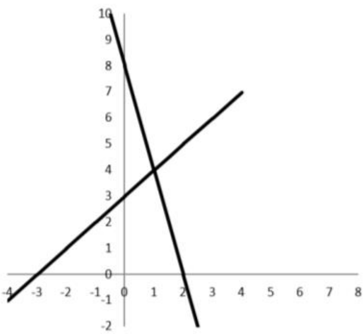


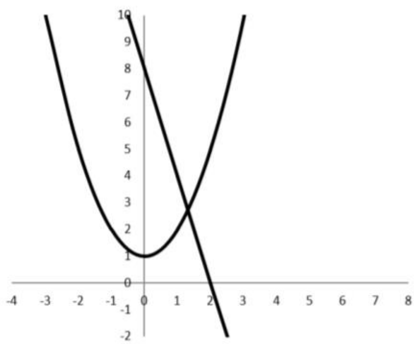
C. Perpotongan Antara Dua Buah Fungsi

Dua buah fungsi dikatakan saling berpotongan apabila kedua buah fungsi tersebut mempunyai titik persekutuan yang disebut titik potong. Titik potong antara kedua buah fungsi dapat dicari dengan mempersamadenganka kedua fungsi tersebut

(fungsi 1 = fungsi 2).

Grafik





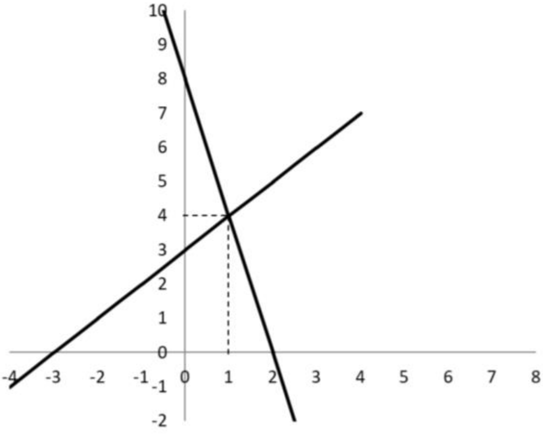
Contoh

1. Carilah koordinat titik potong dari fungsi $y = 8 - 4x$ dan fungsi $y = x + 3$. Serta tunjukkan letak titik potong terssebut kedalam grafik.

$$y = y$$
$$8 - 4x = x + 3$$
$$-5x = -5$$
$$x = 1$$
$$y = x + 3$$
$$y = 1 + 3$$
$$y = 4$$

Jadi koordinat titik potong dari kedua fungsi tersebut adalah (1;4)

- Grafik



BAB 2
APLIKASI FUNGSI LINIER DALAM EKONOMI

A. Permintaan

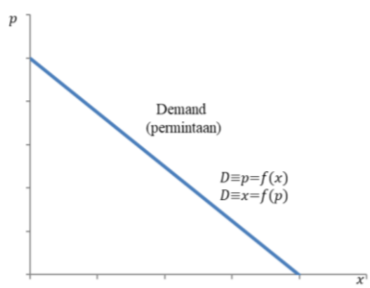
Permintaan adalah jumlah barang yang diminta pada berbagai tingkat harga. Hukum permintaan menunjukkan bahwa besar kecilnya jumlah harga yang diminta sangat tergantung pada tingkat harga barang tersebut. Apabila harga suatu barang naik (*ceteris paribus*), maka jumlah barang yang diminta akan turun. Sebaliknya, apabila harga suatu barang turun, maka jumlah barang yang diminta akan bertambah.

- *Ceteris paribus* artinya **tetap** atau **konstan,** hal ini menunjukkan bahwa hal-hal lain yang sebetulnya mempengaruhi besar kecilnya jumlah yang diminta (selera, kualitas barang, harga subtitusi dan lain-lain) dianggap konstan. Sehingga besar kecilnya barang yang diminta hanya dipengaruhi oleh harga barang itu sendiri. Gambar 1.1. menunjukkan bahwa apabila harga suatu barang naik maka jumlah barang yang diminta akan turun

Fungsi permintaan adalah fungsi yang mencerminkan hubungan antara variabel harga (p) suatu barang dengan variable jumlah yang diminta. Fungsi permintaan secara matematis dapat dituliskan $p = f(x)$. Rumus untuk mencari fungsi permintaan sebagai berikut :

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Grafik fungsi permintaan hanya berlaku di kuadran 1, hal ini dikarenakan tidak ada harga dan kuantitas negatif.



Gambar 1.1. menggambarkan fungsi permintaan, sumbu tegak (keatas) menunjukkan variable harga (p) dan sumbu mendatar menunjukkan variable kuantitas (x). Karena hubungan antara variabel harga (p) dan variabel kuantitas (x) berbanding terbalik, maka grafik fungsi permintaan apabila digambar akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah.

- **Contoh :**

Roti jika dijual dengan harga Rp. 10.000,00 per unit akan laku sebanyak 1.000 unit, akan tetapi jika dijual dengan harga Rp. 12.000,00 per unit maka hanya laku sebanyak 600 unit. Buatlah fungsi permintaan beserta grafiknya!

Jawab :

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{p-10.000}{12.000-10.000} = \frac{x-1.000}{600-1.000}$$

$$\frac{p-10.000}{2.000} = \frac{x-1.000}{-400}$$

$$-400p + 4.000.000 = 2.000x - 2.000.000$$

$$-400p = 2.000x - 6.000.000$$

$$p = \frac{2.000x-6.000.000}{-400}$$

$$p = -5x + 15.000$$

Grafik :

$p = -5x + 15.000$

a. Titik potong dengan sumbu $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$p = -5x + 15.000$

$p = -5(0) + 15.000$

$p = 0 + 15.000$

$p = 15.000$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu p: (0; 15.000).

b. Titik potong dengan sumbu $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{p} = \mathbf{0}$

$p = -5x + 15.000$

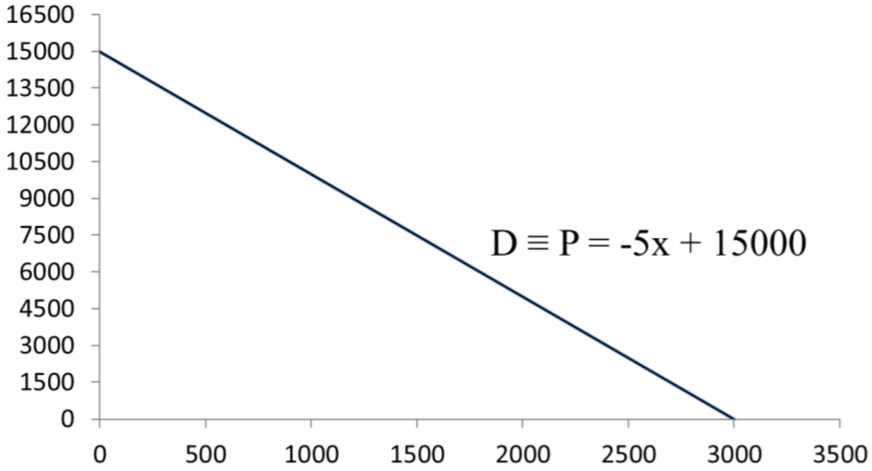
$0 \;\; = -5x + 15.000$

$5x = 15.000$

$x = 3.000$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu p: (3.000; 0).

c. Koefisien arah -5, artinya grafik fungsi linear akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah dengan perubahan sebesar 5 satuan.



B. Penawaran

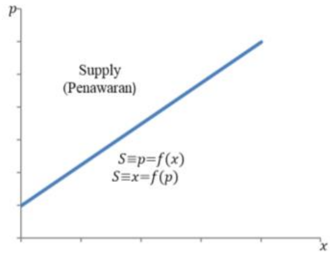
Penawaran adalah jumlah barang yang ditawarkan pada berbagai tingkat harga. Hukum penawaran menunjukkan apabila harga dari suatu barang naik (*ceteris paribus*), maka maka jumlah barang yang ditawarkan tersebut akan bertambah. Hal ini dikarenakan produsen produsen berusaha untuk menggunakan kesempatan memperbesar keuntungannya.

Demikian juga sebaliknya, apabila harga barang turun, jumlah barang ditawarkan akan berkurang karena produsen berusaha mengurangi kerugiannya. *Ceteris paribus* dalam penawaran artinya faktor-faktor lain di luar harga barang itu sendiri yang sebetulnya mempengaruhi besar kecilnya jumlah yang ditawarkan dianggap konstan

Fungsi penawaran adalah fungsi yang mencerminkan hubungan antara variabel harga (p) suatu barang dengan variabel jumlah yang ditawarkan (x). Fungsi penawaran secara matematis dapat dituliskan $p = f(x)$. Rumus untuk mencari fungsi permintaan sebagai berikut :

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Grafik fungsi penawaran hanya berlaku di kuadran 1, hal ini dikarenakan tidak ada harga dan kuantitas negatif.



Gambar 1.2. menggambarkan fungsi penawaran, sumbu tegak (keatas) menunjukkan variable harga (p) dan sumbu mendatar menunjukkan variable kuantitas (x). Karena hubungan antara variabel harga (p) dan kuantitas (x) berbanding lurus, maka grafik fungsi penawaran apabila digambar akan bergerak dari kiri bawah ke kanan atas.

Grafik fungsi penawaran akan bergeser apabila salah satu atau semua variabel yang diangap "*ceteris paribus*" berubah. Apabila harga input variabel berubah, kurva fungsi penawaran akan bergeser. Demikian juga apabila kebijakan pemerintah mengenai pajak dan subsidi berubah, maka kurva penawaran akan berubah.

Contoh :

Roti dengan harga dipasarnya sebesar Rp. 10.000,00 perunit maka produsen akan menawarkan barangnya sebanyak 400 unit. Akan tetapi harga lebih tinggi mejadi Rp. 12.000,00 perunit maka jumlah barang yang akan ditawarkan akan bertambah menjadi 600 unit. Buatlah fungsi penawaran beserta grafiknya!

Jawab :

$$\frac{p-p_1}{p_2-p_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{p-10.000}{12.000-10.000} = \frac{x-400}{600-400}$$

$$\frac{p-10.000}{2.000} = \frac{x-400}{200}$$

$$200p - 2.000.000 = 2.000x - 800.000$$

$$200p = 2.000x + 1.200.000$$

$$p = \frac{2.000x-1.200.000}{200}$$

$$p = 10x + 6.000$$

Grafik :

$p = 10x + 6.000$

a. Titik potong dengan sumbu $p \rightarrow x = 0$

$$p = 10(0) + 6.000$$
$$p = 0 + 6.000$$
$$p = 6.000$$

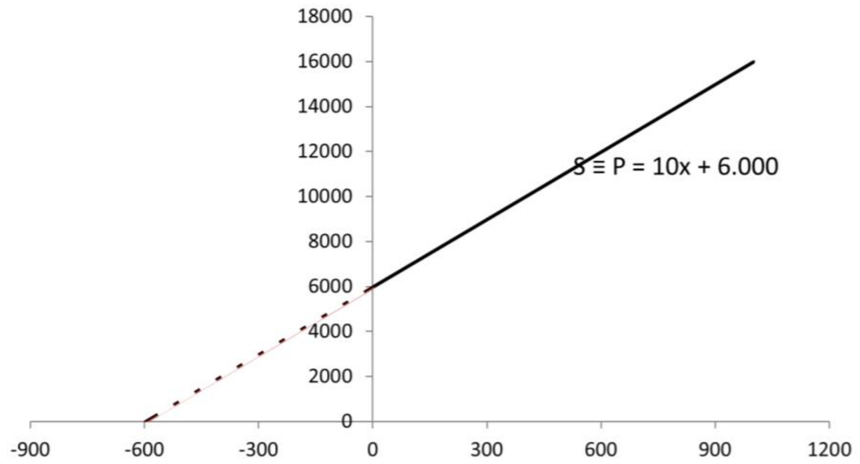
Jadi koordinat titik potong dengan sumbu p: $(0; 6.000)$.

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow p = 0$

$$p = 10x + 6.000$$
$$0 = 10x + 6.000$$
$$-10x = 6.000$$
$$x = -600$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x: $(-600; 0)$

c. Koefisien arah 10, artinya grafik fungsi linear akan bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dengan perubahan sebesar 10 satuan.



C. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar (*market equilibrium*) adalah suatu kondisi dimana permintaan sama dengan penawaran. Sedangkan harga pasar merupakan harga yang terjadi pada titik keseimbangan pasar (titik potong kurva permintaan dan kurva penawaran). Hal ini juga dapat disimpulkan bahwa :

Keseimbangan harga (p_e) tercapai :

Jumlah barang yang diminta = Jumlah barang yang ditawarkan

$$x_e \equiv x_d = x_s$$

Keseimbangan kuantitas (x_e) tercapai :

Harga barang yang diminta = Harga barang yang ditawarkan

$$p_e \equiv p_d = p_s$$

Titik keseimbangan pasar dapat diperoleh dengan cara :

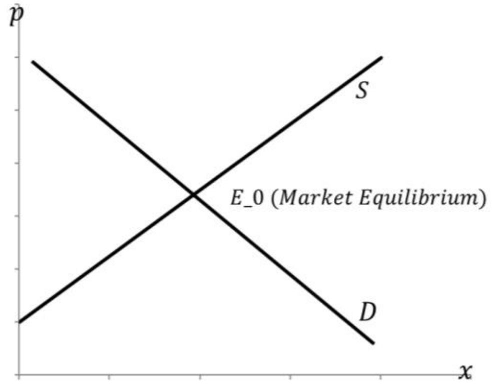
Fungsi permintaan (D) = Fungsi penawaran (S)

Penentuan titik keseimbangan pasar perlu diperhatikan syarat-syarat sebagai berikut :

a. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk nilai-nilai yang positif.

b. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk titik yang memenuhi ketentuan bagi kurva permintaan dan kurva penawaran.

Grafik :



Contoh :

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = -5x + 15.000$ dan fungsi penawaran $S \equiv p = 10x + 6.000$. Carilah titik keseimbangan pasar beserta grafiknya!

Jawab :

$D \equiv p = -5x + 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000$

$$
\begin{aligned}
D &= S \\
-5x + 15.000 &= 10x + 6.000 \\
-15x &= -9.000 \\
x &= 600
\end{aligned}
$$

Jika $x = 600$ maka $p =$

$p = 10x + 6.000$

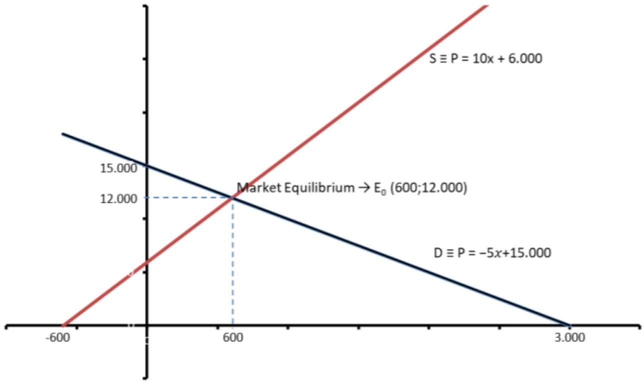
$p = 10\,(600) + 6.000$

$p = 6.000 + 6.000$

$p = 12.000$

Jadi titik keseimbangan pasar pada E_0 (600;12.000).

Grafik :



D. PERPAJAKAN

Pajak merupakan pungutan pajak yang ditarik oleh pemerintah terhadap wajib pajak. Pajak yang dipungut pemerintah dapat bersifat pajak langsung maupun pajak tidak langsung. Pajak langsung merupakan pajak yang dipungut secara langsung dari wajib pajak seperti pajak penghasilan. Pajak tidak langsung merupakan pajak yang dipungut pemerintah secara tidak langsung dari wajib pajak, tetapi melalui pihak pemungut yang kemudian menyetorkan pajak kepada pemerintah seperti pajak penjualan.

Pajak yang akan dibahas adalah pajak penjualan, yaitu **pajak perunit, pajak prosentase dan pajak negatif atau subsidi**. Apabila *ceteris paribus* berubah, maka grafik fungsi penawaran akan bergeser. Perubahan kebijakan pemerintah mengenai adanya pajak dan subsidi dapat membuat kurva penawaran akan bergeser. Kenaikan maupun penurunan pajak akan berpengaruh terhadap bergesernya kurva penawaran. Kurva penawaran akan bergeser keatas apabila adanya kenaikan pajak, artinya kenaikan pajak akan berdampak pada naiknya harga sehingga jumlah penawaran akan menjadi berkurang.

1. Pajak perunit

Pajak perunit adalah pajak yang cara memungutnya berdasarkan setiap unit barang yang terjual. Notasi dari pajak perunit adalah "t". Adanya pajak perunit akan berdampak pada perubahan fungsi penawaran sebesar pajak tersebut (harga naik sebesar pajak). Fungsi penawaran berubah maka secara otomatis grafik fungsi penawaran juga akan berubah, yaitu bergeser keatas sejajar dengan fungsi penawaran sebelum ada pajak. Hal ini menyebabkan harga produk naik dan jumlah barang yang ditawarkan menurun.

Fungsi penawaran sebelum ada pajak dan sesudah ada pajak secara matematis sebagai berikut :

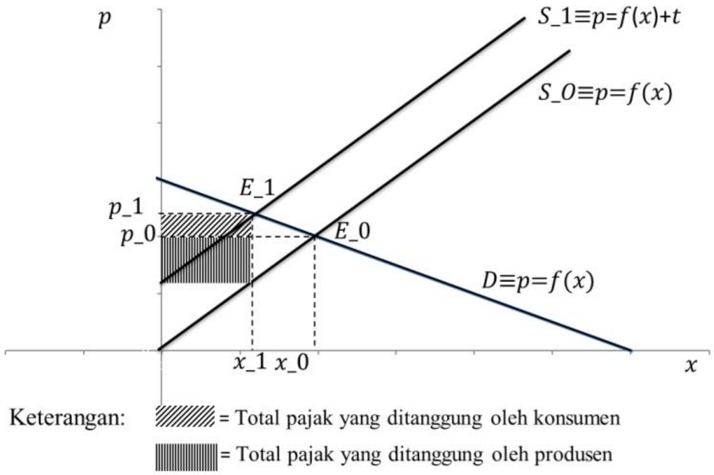
Bentuk Fungsi Penawaran	**Sebelum ada pajak**	**Setelah ada pajak per unit (t)**
$p = f(x)$	$S_0 \equiv p = f(x)$	$S_1 \equiv p = f(x) + t$
$x = f(p)$	$S_0 \equiv x = f(p)$	$S_1 \equiv x = f(p - t)$

Pajak seharusnya dibayar oleh produsen, akan tetapi produsen mengalihkan sebagian beban pajak kepada konsumen dengan cara menaikkan harga jualnya.

Pembagian beban pajak yang harus ditanggung konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah dapat dihitung sebagai berikut:

Tarif pajak per 1 unit	**Total pajak yang harus dibayar / diterima**
Tarif pajak yang dibebankan oleh produsen kepada konsumen $tk_u = p_1 - p_0$	Total pajak yang dibayar oleh konsumen $tk_{tot} = tk_u (x_1)$
Tarif pajak yang ditanggung oleh produsen $tp_u = t - tk_u$	Total pajak yang dibayar oleh produsen $tp_{tot} = tp_u (x_1)$
Tarif pajak yang dikenakan pemerintah kepada produsen sebesar pajak tersebut	Total pajak yang diterima oleh pemerintah $T = t \,.\, x_1$ atau $T = tk_{tot} + tp_{tot}$

Grafik



Contoh :

1. Fungsi berbentuk $\boldsymbol{p = f(x)}$

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = -5x + 15.000$, dan fungsi penawaran $S \equiv p = 10x + 6.000$ terhadap produk ini pemerintah memungut pajak per unit sebesar t=1.500 maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak

b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak

c. Beban pajak yang harus ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah

d. Tunjukkan kedalam grafik

Jawab :

a. $D \equiv p = -5x + 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000$

$$D = S$$
$$-5x + 15.000 = 10x + 6.000$$
$$-15x = -9.000$$
$$x = 600$$

Jika $x = 600$ maka $p =$

$$p = 10x + 6.000$$
$$p = 10\ (600) + 6.000$$
$$p = 6.000 + 6.000$$
$$p = 12.000$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak adalah $E_0(600; 12.000)$.

b. $D \equiv p = -5x + 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000$

$S_1 \equiv p = f(x) + t$

$S_1 \equiv p = 10x + 6.000 + 1.500$

$S_1 \equiv p = 10x + 7.500$

$$D = S_1$$

$$-5x + 15.000 = 10x + 7.500$$

$$-15x = -7.500$$

$$x = 500$$

Jika $x = 500$ maka $p =$

$p = 10x + 7.500$

$p = 10(500) + 7.500$

$p = 5.000 + 7.500$

$p = 12.500$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah $E_1(500; 12.500)$.

c. Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah :

$$
\begin{aligned}
tk_u &= p_1 - p_0 \\
&= 12.500 - 12.000 \\
&= 500
\end{aligned}
$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 500.

$$
\begin{aligned}
tk_{tot} &= tk_u(x_1) \\
&= 500(500) \\
&= 250.000
\end{aligned}
$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 250.000.

$$
\begin{aligned}
tp_u &= t - tk_u \\
&= 1.500 - 500 \\
&= 1.000
\end{aligned}
$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh produsen adalah 1.000.

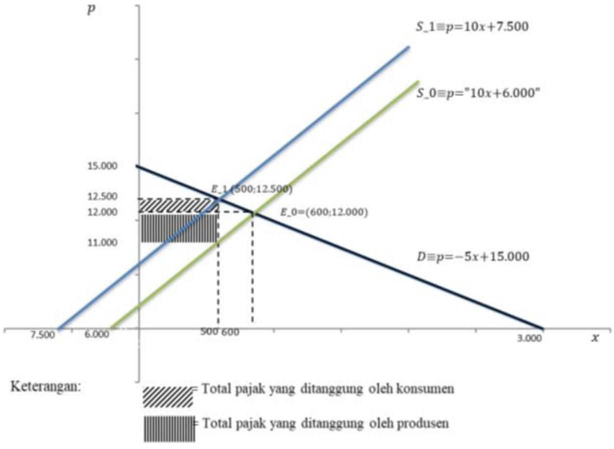
$$
\begin{aligned}
tp_{tot} &= tp_u(x_1) \\
&= 1.000\ (500) \\
&= 500.000
\end{aligned}
$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh produsen adalah 500.000.

$$T = t(x_1) \qquad atau \qquad T = tk_{tot} + tp_{tot}$$
$$= 1.500(500) \qquad\qquad = 250.000 + 500.000$$
$$= 750.000 \qquad\qquad = 750.000$$

Jadi besarnya total pajak yang diterima pemerintah adalah 750.000.

Grafik :



2. Fungsi berbentuk $x = f(p)$

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv x = 12 - 2p$, dan fungsi penawaran $S \equiv x = 2p + 4$ terhadap produk ini pemerintah memungut pajak per unit sebesar t=2 maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak
b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak
c. Beban pajak yang harus ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah
d. Tunjukkan kedalam grafik

Jawab :

a. $D \equiv x = 12 - 2p$

$$S \equiv x = 2p + 4$$

$$D = S$$

$$12 - 2p = 2p + 4$$

$$-4p = -8$$

$$p = 2$$

Jika $p = 2$ maka $x =$

$$x = 12 - 2p$$
$$x = 12 - 2(2)$$
$$x = 12 - 4$$
$$x = 8$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak adalah $E_0(8; 2)$.

b. $D \equiv x = 12 - 2p$

$$S \equiv x = 2p + 4$$
$$S_1 \equiv x = f(p - t)$$
$$S_1 \equiv x = 2(p - 2) + 4$$
$$S_1 \equiv x = 2p - 4 + 4$$
$$S_1 \equiv x = 2p$$
$$D = S_1$$
$$12 - 2p = 2p$$
$$-4p = -12$$
$$p = 3$$

Jika $p = 3$ maka $x =$

$$x = 12 - 2p$$
$$x = 12 - 2(3)$$
$$x = 12 - 6$$
$$x = 6$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah $E_1(6; 3)$.

c. Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah :

$$tk_u = p_1 - p_0$$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 1.

$$tk_{tot} = tk_u(x_1)$$
$$= 1(6)$$
$$= 6$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 6.

$$tp_u = t - tk_u$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh produsen adalah 1.

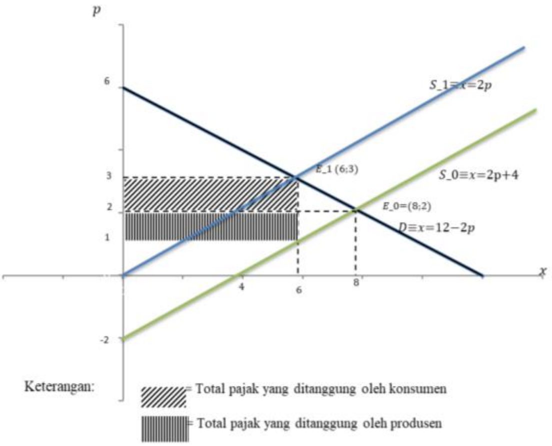
$$tp_{tot} = tp_u(x_1)$$
$$= 1\ (6)$$
$$= 6$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh produsen adalah 6.

$T = t(x_1)$	atau	$T = tk_{tot} + tp_{tot}$
$= 2(6)$		$= 6 + 6$
$= 12$		$= 12$

Jadi besarnya total pajak yang diterima pemerintah adalah 12.

Grafik :



2. Pajak Prosentase

Pajak prosentase adalah pajak yang dipungut berdasarkan prosentase dari hasil penjualan. Notasi dari pajak prosentase adalah "r". Adanya pajak prosentase akan berdampak pada perubahan fungsi penawaran sebesar pajak tersebut (harga naik sebesar pajak).

Fungsi penawaran berubah maka secara otomatis grafik fungsi penawaran juga akan berubah, yaitu bergeser keatas semakin melebar kesenjangannya dibanding dengan fungsi penawaran sebelum ada pajak prosentase. Hal ini menyebabkan harga produk naik dan jumlah barang yang ditawarkan menurun.

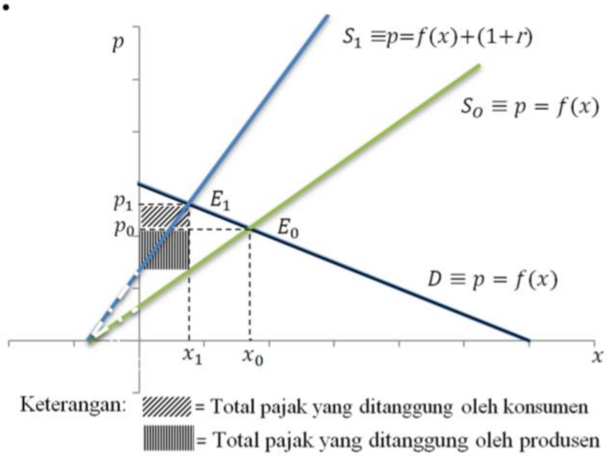
Fungsi penawaran sebelum ada pajak dan sesudah ada pajak secara matematis sebagai berikut :

Bentuk Fungsi Penawaran	Sebelum ada pajak	Setelah ada pajak prosentase (r)
$p = f(x)$	$S_0 \equiv p = f(x)$	$S_1 \equiv p = f(x)(1 + r)$
$x = f(p)$	$S_0 \equiv x = f(p)$	$S_1 \equiv x = f(\frac{p}{1 + r})$

Pembagian beban pajak yang harus ditanggung konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah dapat dihitung seperti pada pajak per unit

Tarif pajak per 1 unit	**Total pajak yang harus dibayar / diterima**
Tarif pajak yang dibebankan oleh produsen kepada konsumen $\mathbf{tk_u = p_1 - p_0}$	Total pajak yang dibayar oleh konsumen $\mathbf{tk_{tot} = tk_u\,(x_1)}$
Tarif pajak yang ditanggung oleh produsen $\mathbf{tp_u = t^* - tk_u}$ $* \, t = \frac{r.p_1}{1+r}$	Total pajak yang dibayar oleh produsen $\mathbf{tp_{tot} = tp_u\,(x_1)}$
Tarif pajak yang dikenakan pemerintah kepada produsen sebesar pajak tersebut	Total pajak yang diterima oleh pemerintah $\mathbf{T = t\,.\,x_1}$ **atau** $\mathbf{T = tk_{tot} + tp_{tot}}$

Grafik :



Contoh :

1. **Fungsi berbentuk $\boldsymbol{p = f(x)}$**

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = -5x + 15.000$, dan fungsi penawaran $S \equiv p = 10x + 6.000$ terhadap produk ini pemerintah memungut pajak per unit sebesar t=25% maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak

b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak

c. Beban pajak yang harus ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah

d. Tunjukkan kedalam grafik

Jawab :

a. $D \equiv p = -5x + 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000$

$$D = S$$

$$-5x + 15.000 = 10x + 6.000$$

$$-15x = -9.000$$

$$x = 600$$

Jika $x = 600$ maka $p =$

$$p = 10x + 6.000$$
$$p = 10\ (600) + 6.000$$
$$p = 6.000 + 6.000$$
$$p = 12.000$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak adalah $E_0(600; 12.000)$.

b. $D \equiv p = -5x + 15.000$

$$S \equiv p = 10x + 6.000$$
$$r = 25\%$$
$$S_1 \equiv p = f(x)(1 + r)$$
$$S_1 \equiv p = (10x + 6.000)(1 + 25\%)$$
$$S_1 \equiv p = (10x + 6.000)(1{,}25)$$
$$S_1 \equiv p = 12{,}5x + 7.500$$
$$D = S_1$$
$$-5x + 15.000 = 12{,}5x + 7.500$$
$$-16x = 7.500$$
$$x = 429$$

Jika $x = 429$ maka $p =$

$$p = -5x + 15.000$$
$$p = -5(429) + 15.000$$
$$p = -2.143 + 15.000$$
$$p = 12.857$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah $E_1(429; 12.857)$.

c. Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah :

$$tk_u = p_1 - p_0$$
$$= 12.857 - 12.000$$
$$= 857$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 857.

$$tk_{tot} = tk_u(x_1)$$
$$= 857(429)$$
$$= 367.653$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 367.653.

$t = \frac{r.p_1}{1+r} \rightarrow t = \frac{25\%\ (12.857)}{1+25\%} = \frac{3.214,25}{1,25} = 2.571,4$

$tp_u = t - tk_u$

$= 2.571,4 - 857$

$= 1.714,4$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh produsen adalah 1.714,4.

$tp_{tot} = tp_u(x_1)$

$= 1.714,4\ (429)$

$= 735.477,6$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh produsen adalah 735.477,6

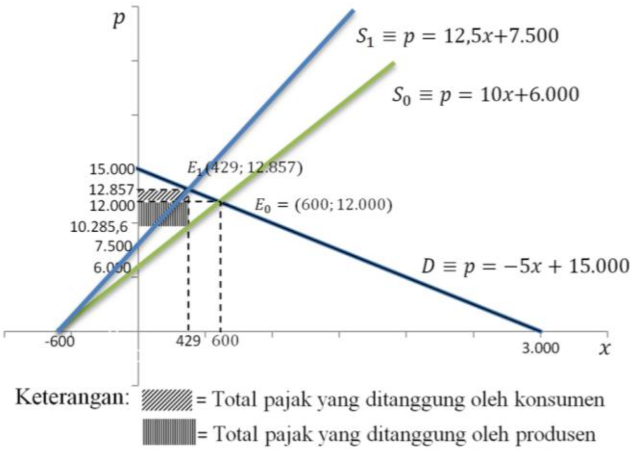
$T = t(x_1)$ atau $T = tk_{tot} + tp_{tot}$

$= 2.571,4(429)$ $= 367.653 + 735.477,6$

$= 1.103.130,6$ $= 1.103.130,6$

Jadi besarnya total pajak yang diterima pemerintah adalah 1.103.130,6.

Grafik



2. **Fungsi berbentuk $\boldsymbol{x = f(p)}$**

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv x = 12 - 2p$, dan fungsi penawaran $S \equiv x = 2p + 4$. Terhadap barang ini pemerintah memungut pajak prosentase sebesar r= 25%, maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak

b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak

c. Beban pajak yang harus ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah

d. Tunjukkan kedalam grafik

Jawab :

a. $D \equiv x = 12 - 2p$

$S \equiv x = 2p + 4$

$$D = S$$
$$12 - 2p = 2p + 4$$
$$-4p = -8$$
$$p = 2$$

Jika $p = 2$ maka $x =$

$$x = 12 - 2p$$
$$x = 12 - 2(2)$$
$$x = 12 - 4$$
$$x = 8$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak adalah $E_0(8; 2)$.

b. $D \equiv x = 12 - 2p$

$S \equiv x = 2p + 4$

$r = 25\%$

$S_1 \equiv x = f\left(\frac{p}{1+r}\right)$

$S_1 \equiv x = 2\left(\frac{p}{1+25\%}\right) + 4$

$S_1 \equiv x = \frac{2p}{1,25} + 4$

$S_1 \equiv x = 1,6p + 4$

$D = S_1$

$12 - 2p = 1,6p + 4$

$-3,6p = -8$

$p = 2,22$

Jika $p = 2,22$ maka $x =$

$x = 12 - 2p$

$x = 12 - 2(2,22)$

$x = 12 - 4,44$

$x = 7,56$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah $E_1(7,56; 2,22)$.

Besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah :

$$tk_u = p_1 - p_0$$
$$= 2{,}22 - 2$$
$$= 0{,}22$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 0,22.

$$tk_{tot} = tk_u(x_1)$$
$$= 0{,}22(7{,}56)$$
$$= 1{,}66$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 1,66.

$$t = \frac{r.p_1}{1+r} \rightarrow t = \frac{25\%\,(2{,}22)}{1+25\%} = \frac{0{,}555}{1{,}25} = 0{,}44$$

$$tp_u = t - tk_u$$
$$= 0{,}44 - 0{,}22$$
$$= 0{,}22$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh produsen adalah 0,22.

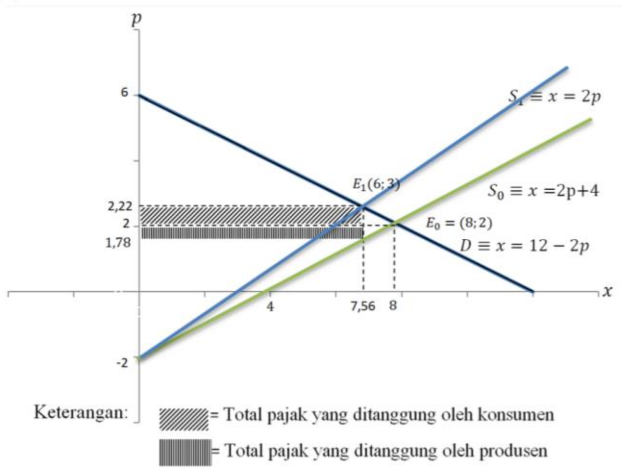
$$tp_{tot} = tp_u(x_1)$$
$$= 0{,}22\ (7{,}56)$$
$$= 1{,}66$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh produsen adalah 1,66.

$$T = t(x_1) \qquad \text{atau} \qquad T = tk_{tot} + tp_{tot}$$
$$= 0{,}44(7{,}56) \qquad\qquad = 1{,}66 + 1{,}66$$
$$= 3{,}33 \qquad\qquad = 3{,}32$$

Jadi besarnya total pajak yang diterima pemerintah adalah 3,33.

Grafik :



3. Subsidi / Pajak Negatif

Subsidi adalah bantuan dari pemerintah yang diberikan kepada produsen. Subsidi membuat harga produk menjadi murah dan jumlah yang ditawarkan menjadi lebih banyak. Notasi dari subsidi adalah "s".

Adanya subsidi akan berdampak pada perubahan fungsi penawaran sebesar subsidi tersebut (harga turun sebesar subsidi). Fungsi penawaran berubah maka secara otomatis grafik fungsi penawaran juga akan berubah, yaitu bergeser kebawah sejajar dengan fungsi penawaran sebelum ada sumsidi. Hal ini menyebabkan harga produk menjadi rendah dan jumlah barang yang ditawarkan menjadi lebih banyak.

Fungsi penawaran sebelum ada subsidi dan sesudah ada subsidi secara matematis sebagai berikut :

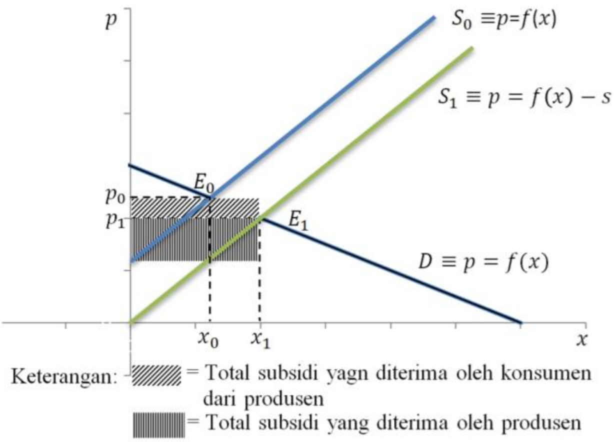
Bentuk Fungsi Penawaran	Sebelum ada subsidi	Setelah ada subsidi (s)
$p = f(x)$	$S_0 \equiv p = f(x)$	$S_1 \equiv p = f(x) - s$
$x = f(p)$	$S_0 \equiv x = f(p)$	$S_1 \equiv x = f(p + s)$

Produsen bukan hanya membebani konsumen dengan pajak, tetapi juga membagikan subsidi yang diterima dari pemerintah kepada konsumen.

Pembagian subsidi yang diterima konsumen, produsen serta yang diberikan oleh pemerintah dapat dihitung sebagai berikut:

Tarif subsidi per 1 unit	Total subsidi yang diterima
Tarif subsidi yang diberikan oleh produsen kepada konsumen **$sk_u = p_0 - p_1$**	Total subsidi yang diterima oleh konsumen dari produsen **$sk_{tot} = sk_u\ (x_1)$**
Tarif subsidi yang diterima oleh produsen dari pemerintah **$sp_u = s - tk_u$**	Total subsidi yang diterima oleh produsen dari pemerintah **$sp_{tot} = sp_u\ (x_1)$**
Tarif subsidi yang diberikan pemerintah kepada produsen sebesar subsidi tersebut	Total subsidi yang diberikan oleh pemerintah kepada produsen **$T = t\ .\ x_1$ atau $T = sk_{tot} + sp_{tot}$**

Grafik :



Contoh :

1. Fungsi berbentuk $p = f(x)$

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = -5x + 15.000$, dan fungsi penawaran $S \equiv p = 10x + 6.000$ terhadap produk ini pemerintah memberikan subsidi per unit sebesar s=1.200 kepada produsen, maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum ada subsidi

b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada subsidi

c. Besarnya subsidi diterima oleh konsumen, produsen serta yang diberikan oleh pemerintah

d. Tunjukkan kedalam grafik

Jawab :

a. $D \equiv p = -5x + 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000$

$$D = S$$
$$-5x + 15.000 = 10x + 6.000$$
$$-15x = -9.000$$
$$x = 600$$

Jika $x = 600$ maka $p =$

$$p = 10x + 6.000$$
$$p = 10\ (600) + 6.000$$
$$p = 6.000 + 6.000$$
$$p = 12.000$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum ada subsidi adalah $E_0(600; 12.000)$.

b. $D \equiv p = -5x + 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000$

$S_1 \equiv p = f(x) - s$

$S_1 \equiv p = 10x + 6.000 - 1.200$

$S_1 \equiv p = 10x + 4.800$

$$D = S_1$$

$$-5x + 15.000 = 10x + 4.800$$

$$-15x = -10.200$$

$$x = 680$$

Jika $x = 680$ maka $p =$

$p = 10x + 4.800$

$p = 10(680) + 4.800$

$p = 6.800 + 4.800$

$p = 11.600$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada subsidi adalah $E_1(680; 11.600)$.

c. Besarnya subsidi yang diterima oleh konsumen, produsen serta yang diberikan oleh pemerintah :

$$\begin{aligned} sk_u &= p_0 - p_1 \\ &= 12.000 - 11.600 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Jadi besarnya subsidi per unit yang diterima oleh konsumen dari produsen adalah 400.

$$\begin{aligned} sk_{tot} &= sk_u(x_1) \\ &= 400(680) \\ &= 272.000 \end{aligned}$$

Jadi besarnya total subsidi yang diterima oleh konsumen dari produsen adalah 272.000.

$$\begin{aligned} sp_u &= s - sk_u \\ &= 1.200 - 400 \\ &= 800 \end{aligned}$$

Jadi besarnya subsidi per unit yang diterima oleh produsen dari pemerintah adalah 800.

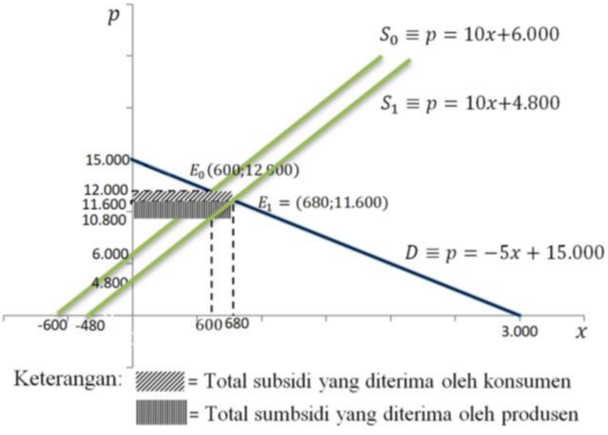
$$\begin{aligned} sp_{tot} &= sp_u(x_1) \\ &= 800\ (680) \\ &= 544.000 \end{aligned}$$

Jadi besarnya total subsidi yang diterima oleh produsen dari pemerintah adalah 544.000.

$$S = s(x_1) \quad \text{atau} \quad S = sk_{tot} + sp_{tot}$$
$$= 1.200(680) \qquad\qquad = 272.000 + 544.000$$
$$= 816.000 \qquad\qquad = 816.000$$

Jadi besarnya total subsidi yang diberikan pemerintah adalah 816.000.

Grafik :



2. Fungsi berbentuk $x = f(p)$

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv x = 12 - 2p$, dan fungsi penawaran $S \equiv x = 2p + 4$ terhadap produk ini pemerintah memberikan subsidi per unit sebesar s=2 kepada produsen, maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum ada subsidi
b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada subsidi
c. Besarnya subsidi diterima oleh konsumen, produsen serta yang diberikan oleh pemerintah
d. Tunjukkan kedalam grafik

Jawab :

a. $D \equiv x = 12 - 2p$

$S \equiv x = 2p + 4$

$$D = S$$

$$12 - 2p = 2p + 4$$

$$-4p = -8$$

$$p = 2$$

Jika $p = 2$ maka $x =$

$x = 12 - 2p$

$x = 12 - 2(2)$

$x = 12 - 4$

$x = 8$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah $E_0(8; 2)$.

b. $D \equiv x = 12 - 2p$

$S \equiv x = 2p + 4$

$S_1 \equiv x = f(p + s)$

$S_1 \equiv x = 2(p + 2) + 4$

$S_1 \equiv x = 2p + 4 + 4$

$S_1 \equiv x = 2p + 8$

$D = S_1$

$12 - 2p = 2p + 8$

$-4p = -4$

$p = 1$

Jika $p = 1$ maka $x =$

$$x = 12 - 2p$$

$$x = 12 - 2(1)$$

$$x = 12 - 2$$

$$x = 10$$

Jadi besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah $E_1(10; 1)$

c. Besarnya subsidi yang diterima oleh konsumen, produsen serta yang diberikan oleh pemerintah :

$$sk_u = p_0 - p_1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

Jadi besarnya subsidi per unit yang diterima oleh konsumen dari produsen adalah 1.

$$sk_{tot} = sk_u(x_1)$$

$$= 1(10)$$

$$= 10$$

Jadi besarnya total subsidi yang diterima oleh konsumen dari produsen adalah 10.

$$sp_u = s - sk_u$$
$$= 2 - 1$$
$$= 1$$

Jadi besarnya subsidi per unit yang diterima oleh produsen dari pemerintah adalah 1.

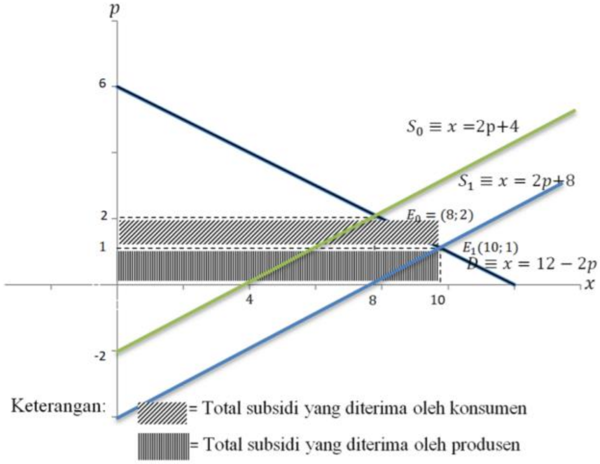
$$sp_{tot} = sp_u(x_1)$$
$$= 1\ (10)$$
$$= 10$$

Jadi besarnya total subsidi yang diterima oleh produsen dari pemerintah adalah 10.

$S = s(x_1)$	atau	$S = sk_{tot} + sp_{tot}$
$= 2(10)$		$= 10 + 10$
$= 20$		$= 20$

Jadi besarnya total subsidi yang diberikan oleh pemerintah adalah 20.

Grafik:



p
6
2
1
-2
4
8
10
x
$S_0 \equiv x = 2p + 4$
$S_1 \equiv x = 2p + 8$
$E_0 = (8; 2)$
$E_1(10; 1)$
$D \equiv x = 12 - 2p$
Keterangan:
= Total subsidi yang diterima oleh konsumen
= Total subsidi yang diterima oleh produsen

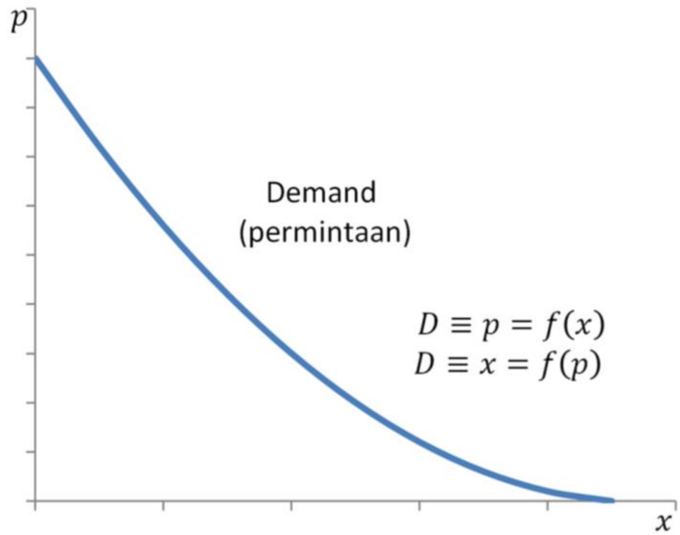
BAB 3
APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

A. Fungsi Permintaan Kuadrat

Fungsi permintaan adalah fungsi yang mencerminkan hubungan antara variabel harga (p) suatu barang dengan variable jumlah yang diminta (x). Fungsi permintaan kuadrat secara matematis dapat dituliskan $p = f(x)$ yaitu $p = ax^2 + bx + c$ atau $x = f(p)$ yaitu $= x^2 + bx + c$.

Hubungan antara variabel harga (p) dan variabel kuantitas (x) berbanding terbalik dan juga merupakan fungsi kuadrat (*non-linear)*, maka grafik fungsi permintaan apabila digambar akan bergerak dari kiri atas ke kanan bawah dan berbentuk parabola.

Grafik fungsi permintaan hanya berlaku di kuadran 1, hal ini dikarenakan tidak ada harga dan kuantitas negatif. Gambar 1.1. menggambarkan fungsi permintaan, sumbu tegak (keatas) menunjukkan variable harga (p) dan sumbu mendatar menunjukkan variable kuantitas (x).



B. Fungsi Penawaran Kuadrat

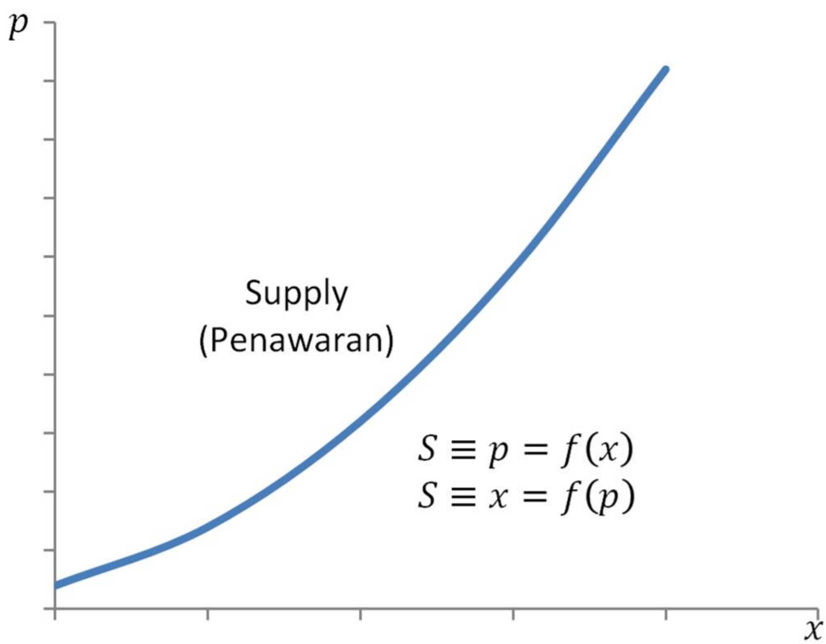
Fungsi penawaran adalah fungsi yang mencerminkan hubungan antara variabel harga (p) suatu barang dengan variabel jumlah yang ditawarkan (x). Fungsi penawaran kuadrat secara matematis dapat dituliskan

$p = f(x)$ yaitu $p = ax^2 + bx + c$ atau

$x = f(p)$ yaitu $x = x^2 + bx + c$.

Hubungan antara variabel harga (p) dan kuantitas (x) berbanding lurus dan juga merupakan fungsi kuadrat (*non-linear)*, maka grafik fungsi kuadrat penawaran apabila digambar akan bergerak dari kiri bawah ke kanan atas dan berbentuk parabola.

Grafik fungsi penawaran hanya berlaku di kuadran 1, hal ini dikarenakan tidak ada harga dan kuantitas negatif. Gambar 1.2. menggambarkan fungsi permintaan, sumbu tegak (keatas) menunjukkan variable harga (p) dan sumbu mendatar menunjukkan variable kuantitas (x).



Contoh soal:

Fungsi permintaan kuadrat → $p = f(x)$

Gambarlah grafik dari fungsi permintaan $D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$!

Jawab :

Titik potong dengan sumbu $p \rightarrow x = 0$

a. $D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$

$$p = 2(0)^2 - 22(0) + 60$$

$$p = 60$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu p adalah $A(0; 60)$

b. Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow p = 0$

$$D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$$

Nilai dikriminannya adalah :

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-22)^2 - 4(2)(60)$

$= 484 - 480$

$= 4$

Nilai $D > 0$ maka grafik fungsi permintaan kuadrat tersebut akan memotong sumbu x di 2 titik.

Koordinat titik potong :

$$x_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1x_2 = \frac{-(-22) \pm \sqrt{4}}{2(2)}$$

$$x_1x_2 = \frac{22 \pm 2}{4}$$

$$x_1 = \frac{22+2}{4} \qquad x_2 = \frac{22-2}{4}$$

$$x_1 = \frac{24}{4} \qquad x_2 = \frac{20}{4}$$

$$x_1 = 6 \qquad x_2 = 5$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah $B(6; 0)$ dan $C(5; 0)$

c. Titik puncak

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad p = \frac{-D}{4a}$$

$$x = \frac{-(-22)}{2(2)} \qquad p = \frac{-4}{4(2)}$$

$$x = \frac{22}{4} \qquad p = \frac{-4}{8}$$

$$x = 5{,}5 \qquad p = -0{,}5$$

Jadi koordinat titik puncaknya adalah $P(5{,}5; -0{,}5)$

d. Sumbu simetri

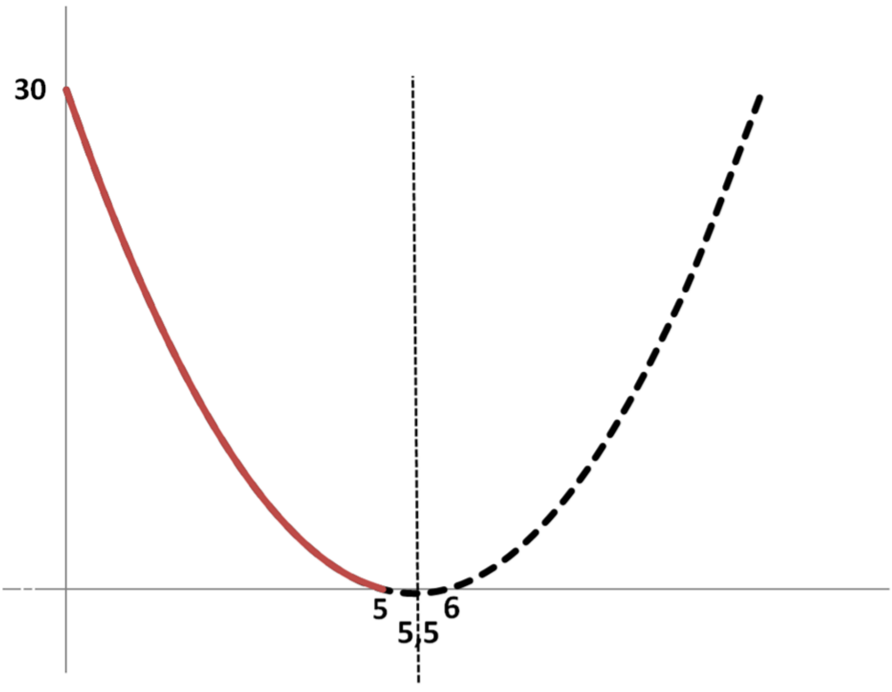
$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(-22)}{2(2)}$$

$$x = \frac{22}{4}$$

$$x = 5{,}5$$

Jadi sumbu simetrinya adalah $x = 5{,}5$



2. Fungsi penawaran kuadrat $\rightarrow p = f(x)$

Gambarlah grafik dari fungsi Penawaran $S \equiv p = x^2 + 2x + 1$!

Jawan :

Titik potong dengan sumbu $p \rightarrow x = 0$

$S \equiv p = x^2 + 2x + 1$

$S \equiv p = (0)^2 + 2(0) + 1$

$p = 1$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu p adalah $A(0; 1)$

Titik potong dengan sumbu $x \rightarrow p = 0$

$$S \equiv p = x^2 + 2x + 1$$

Nilai dikriminannya adalah :

$D = b^2 - 4ac$

$D = (2)^2 - 4(1)(1)$

$= 4 - 4$

$= 0$

Nilai $D = 0$ maka grafik fungsi permintaan kuadrat tersebut akan memotong sumbu x di 1 titik.

Koordinat titik potong :

$$x_1 x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-(2) \pm \sqrt{0}}{2(1)}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-2}{2}$$

$$x_1 = x_2 = -1$$

Jadi koordinat titik potong dengan sumbu x adalah $B(-1; 0)$

c. Titik puncak

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad p = \frac{-D}{4a}$$

$$x = \frac{-(2)}{2(1)} \qquad p = \frac{-0}{4(1)}$$

$$x = \frac{-2}{2} \qquad p = \frac{0}{4}$$

$$x = -1 \qquad p = 0$$

Jadi koordinat titik puncaknya adalah $P(-1; 0)$

d. Sumbu simetri

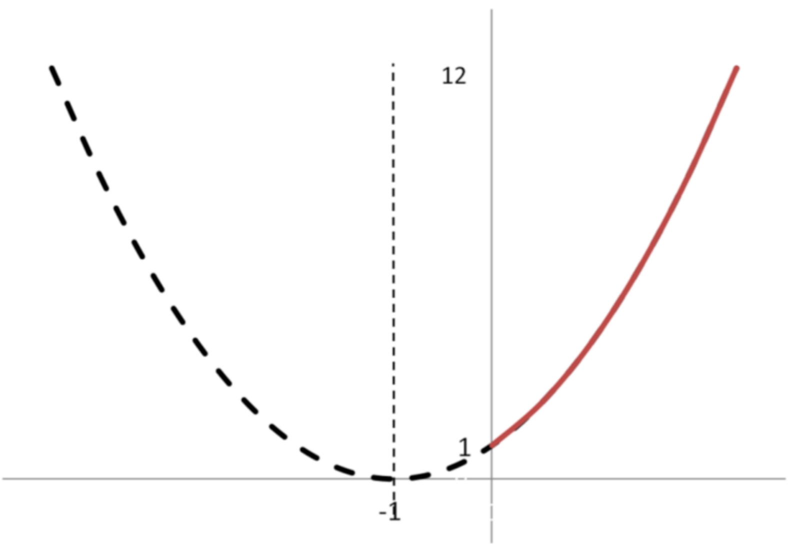
$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-(2)}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2}{2}$$

$$x = -1$$

Jadi sumbu simetrinya adalah $x = -1$



C. KESEIMBANGAN PASAR

Keseimbangan pasar (*market Equilibrium*) adalah suatu kondisi dimana permintaan sama dengan penawaran. Sedangkan harga pasar merupakan harga yang terjadi pada titik keseimbangan pasar (titik potong kurva permintaan dan kurva penawaran).

Hal ini juga dapat disimpulkan bahwa :

Keseimbangan harga (p_e) tercapai :

Jumlah barang yang diminta = Jumlah barang yang ditawarkan

$$x_e \equiv x_d = x_s$$

Atau

Keseimbangan kuantitas (x_e) tercapai :

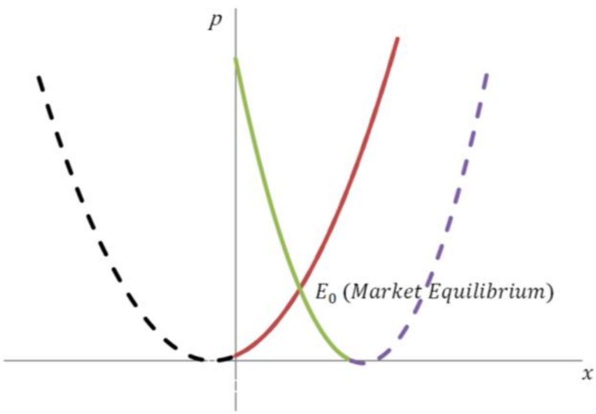
Harga barang yang diminta = Harga barang yang ditawarkan

$$p_e \equiv p_d = p_s$$

Penentuan titik keseimbangan pasar perlu diperhatikan syarat-syarat sebagai berikut :

1. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk nilai-nilai yang positif.

2. Titik keseimbangan pasar hanya berlaku untuk titik yang memenuhi ketentuan bagi kurva permintaan dan kurva penawaran.



Gambar 1.3. Grafik Keseimbangan Pasar

Titik keseimbangan pasar dapat diperoleh dengan cara :

Fungsi permintaan (D) = Fungsi penawaran (S)

Contoh :

3. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$ dan fungsi penawaran $S \equiv p = x^2 + 2x + 1$. Carilah titik keseimbangan pasar beserta grafiknya!

Jawab:

$D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$

$S \equiv p = x^2 + 2x + 1$

$$D = S$$

$$2x^2 - 22x + 60 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 24x + 59 = 0$$

Nilai dikriminannya adalah :

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-24)^2 - 4(1)(59)$

$= 576 - 236$

$= 340$

Koordinat titik keseimbangan pasar :

$$x_1 x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-(-24) \pm \sqrt{340}}{2(1)}$$

$$x_1 x_2 = \frac{24 \pm 18,44}{2}$$

$$x_1 = \frac{24 + 18,44}{2}$$

$$x_1 = \frac{42,44}{2}$$

$$x_1 = 21,22$$

Maka $p = 21,22^2 + 2(21,22) + 1$

$p = 450,29 + 42,44 + 1 = 493,73$ (tidak memenuhi syarat)

$$x_2 = \frac{24 - 18,44}{2}$$

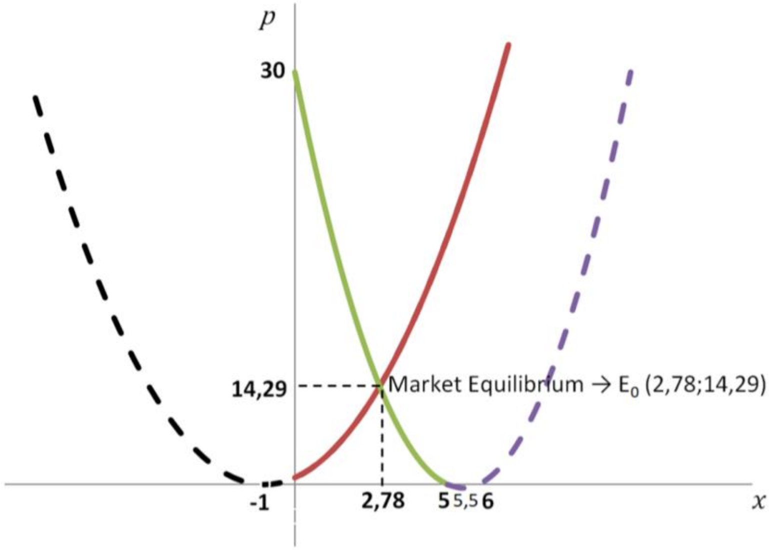
$$x_2 = \frac{5,56}{2}$$

$$x_2 = 2,78$$

Maka $p = 2,78^2 + 2(2,78) + 1$

$p = 7,73 + 5,56 + 1 = 14,29$

Jadi titik keseimbangan pasar pada E_0 (2,78;14,29)



D. PERPAJAKAN

Pajak yang akan dibahas adalah pajak penjualan, yaitu **pajak perunit, pajak prosentase dan pajak negatif atau subsidi**.

1. Pajak perunit

Pajak perunit adalah pajak yang cara memungutnya berdasarkan setiap unit barang yang terjual. Notasi dari pajak perunit adalah "t". Adanya pajak perunit akan berdampak pada perubahan fungsi penawaran sebesar pajak tersebut (harga naik sebesar pajak).

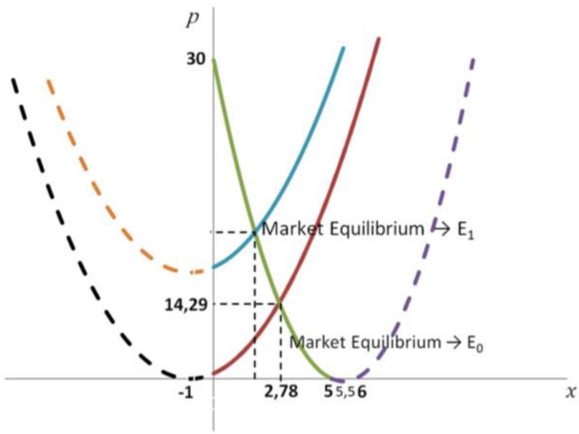
Fungsi penawaran sebelum ada pajak dan sesudah ada pajak secara matematis sebagai berikut :

Bentuk Fungsi Penawaran	Sebelum ada pajak	Setelah ada pajak per unit (t)
$p = f(x)$	$S_0 \equiv p = f(x)$	$S_1 \equiv p = f(x) + t$
$x = f(p)$	$S_0 \equiv x = f(p)$	$S_1 \equiv x = f(p - t)$

Pembagian beban pajak yang harus ditanggung konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah dapat dihitung sebagai berikut:

Tarif pajak per 1 unit	Total pajak yang harus dibayar / diterima
Tarif pajak yang dibebankan oleh produsen kepada konsumen $tk_u = p_1 - p_0$	Total pajak yang dibayar oleh konsumen $tk_{tot} = tk_u (x_1)$
Tarif pajak yang ditanggung oleh produsen $tp_u = t - tk_u$	Total pajak yang dibayar oleh produsen $tp_{tot} = tp_u (x_1)$
Tarif pajak yang dikenakan pemerintah kepada produsen sebesar pajak tersebut	Total pajak yang diterima oleh pemerintah $T = t \cdot x_1$ atau $T = tk_{tot} + tp_{tot}$

Grafik



Contoh Soal

Fungsi berbentuk $p = f(x)$

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$ dan fungsi penawaran $S \equiv p = x^2 + 2x + 1$ terhadap produk ini pemerintah memungut pajak per unit sebesar t=3 maka tentukanlah :

a. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak
b. Besarnya kuantitas dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak
c. Beban pajak yang harus ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah
d. Tunjukkan kedalam grafik

JAWAB

$D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$

$S \equiv p = x^2 + 2x + 1$

$$D = S$$

$2x^2 - 22x + 60 \ = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 24x + 59 = 0$

Nilai dikriminannya adalah :

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-24)^2 - 4(1)(59)$

$= 576 - 236$

$= 340$

Koordinat titik keseimbangan pasar :

$x_1x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1x_2 = \frac{-(-24) \pm \sqrt{340}}{2(1)}$

$x_1x_2 = \frac{24 \pm 18,44}{2}$

$x_1 = \frac{24+18,44}{2}$

$x_1 = \frac{42,44}{2}$

$x_1 = 21,22$

Maka $p = 21,22^2 + 2(21,22) + 1$

$p = 450,29 + 42,44 + 1 = 493,73$ (tidak memenuhi syarat)

$x_2 = \frac{24-18{,}44}{2}$

$x_2 = \frac{5{,}56}{2}$

$x_2 = 2{,}78$

Maka $p = 2{,}78^2 + 2(2{,}78) + 1$

$p = 7{,}73 + 5{,}56 + 1 = 14{,}29$

Jadi besarnya kuantitas dan dan harga keseimbangan pasar sebelum pajak adalah $E_0(2{,}78; 14{,}29)$

$D \equiv p = 2x^2 - 22x + 60$

$S \equiv p = x^2 + 2x + 1$

$S_1 \equiv p = f(x) + t$

$S_1 \equiv p = x^2 + 2x + 1 + 3$

$S_1 \equiv p = x^2 + 2x + 4$

$D = S_1$

$2x^2 - 22x + 60 = x^2 + 2x + 4$

$x^2 - 24x + 56 = 0$

Nilai dikriminannya adalah :

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-24)^2 - 4(1)(56)$

$\quad = 576 - 224$

$\quad = 352$

Koordinat titik keseimbangan pasar :

$x_1 x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 x_2 = \frac{-(-24) \pm \sqrt{352}}{2(1)}$

$x_1 x_2 = \frac{24 \pm 18,76}{2}$

$x_1 = \frac{24 + 18,76}{2}$

$x_1 = \frac{42,76}{2}$

$x_1 = 21,38$

Maka $p = 21,38^2 + 2(21,38) + 4$

$p = 457,10 + 42,76 + 4 = 503,86$

(tidak memenuhi syarat)

$$x_2 = \frac{24-18,76}{2}$$
$$x_2 = \frac{5,24}{2}$$
$$x_2 = 2,62$$

Maka $p = 2,62^2 + 2(2,62) + 4$

$$p = 6,86 + 5,24 + 4 = 16,1$$

Jadi besarnya kuantitas dan dan harga keseimbangan pasar setelah ada pajak adalah $E_1(2,62; 16,1)$

Besarnya pajak yang ditangguhkan oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah :

$$tk_u = p_1 - p_0$$
$$= 16,1 - 14,29$$
$$= 1,81$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 1,81.

$$tk_{tot} = tk_u(x_1)$$
$$= 1,81(2,62)$$
$$= 4,74$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh konsumen adalah 4,74.

$$tp_u = t - tk_u$$
$$= 3 - 1{,}81$$
$$= 1{,}19$$

Jadi besarnya pajak per unit yang harus ditanggung oleh produsen adalah 1,19.

$$tp_{tot} = tp_u(x_1)$$
$$= 1{,}19\ (2{,}62)$$
$$= 3{,}12$$

Jadi besarnya total pajak yang harus ditanggung oleh produsen adalah 3,12

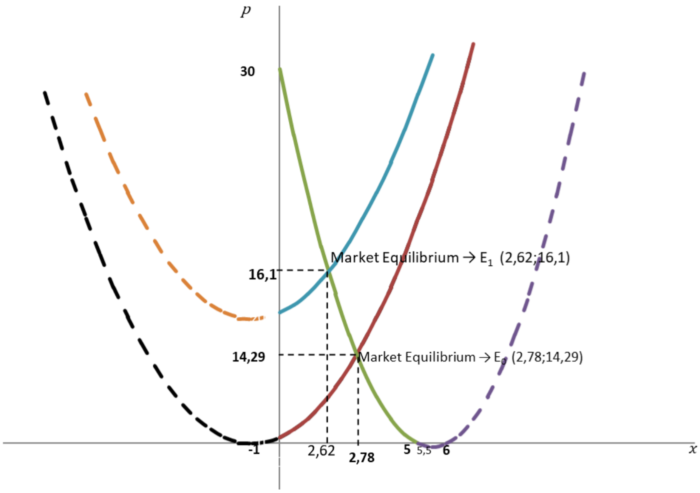
$$T = t(x_1)$$
$$= 3(2{,}62)$$
$$= 7{,}86$$

atau

$$T = tk_{tot} + tp_{tot}$$
$$= 4{,}74 + 3{,}12$$
$$= 7{,}86$$

Jadi besarnya total pajak yang diterima pemerintah adalah 7,86

Grafik


p
30
16,1
14,29
Market Equilibrium → E_1 (2,62;16,1)
Market Equilibrium → E_0 (2,78;14,29)
-1
2,62
2,78
5
5,5
6
x

BAB 4
DIFERENSIAL

A. Pengertian

Diferensial (turunan) adalah suatu fungsi yang hanya mengandung satu variabel independen yang hanya mempunyai satu macam turunan saja.

Jika diformulasikan dengan fungsi $\mathrm{y} = f(x)$ makan turunan p terhadap x dinotasikan

$$\frac{dy}{dx}$$

atau sering ditulis

$$\mathbf{y}'$$

B. Diferensial Fungsi Aljabar

1. Diferensial dari y sama dengan konstanta $\rightarrow y = c$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Contoh :

$y = 14$

$\frac{dy}{dx} = 0$

2. Diferensial dari y sama dengan $x \rightarrow y = x$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Contoh :

$y = x$

$\frac{dy}{dx} = 1$

3. Diferensial dari fungsi pangkat banyak $\rightarrow y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = n\, x^{(n-1)}$$

Contoh :

$y = x^3$

$\frac{dy}{dx} = 3\, x^{(3-1)}$

$= 3x^2$

4. Diferensial dari perkalian konstanta dengan fungsi x pangkat $n \rightarrow y = c.x^n$

$$\frac{dy}{dx} = c.n.x^{(n-1)}$$

Contoh :

$\frac{dy}{dx} = 3x^4$

$= 3.4\, x^{(4-1)}$

$= 12x^3$

5. Diferensiasi dari penjumlahan/pengurangan fungsi

Jika $y = u \pm v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

Contoh :

$p = x^3 + 2x + 12$

$p' = 3.1x^{(3-1)} + 1.2x^{1-1} + 0$

$p' = 3x^2 + 2$

6. Diferensial dari suatu perkalian fungsi

Jika $y = u.v$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ atau $\frac{dy}{dx} = y' = uv' + vu'$

Contoh :

$y = (4x^2 + 5)(5x + 3x^2)$

$\frac{dy}{dx} = (4x^2 + 5)(5 + 6x) + (5x + 3x^2)(8x)$

$= 20x^2 + 24x^3 + 25 + 30x + 40x^2 + 24x^3$

$= 48x^3 + 60x^2 + 25$

7. Diferensial dari pembagian fungsi

Jika $y = \frac{u}{v}$, dimana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka

$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ atau $\frac{dy}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Contoh :

$$y = \frac{2x^2 - 4}{x+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)(4x) - (2x^2-4)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 8x - 2x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

8. Diferensial dari fungsi pecah

Jika $y = \frac{1}{x^m}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{-m}{x^{m+1}}$

Contoh :

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^{2+1}}$$

$$= \frac{-2}{x^3}$$

9. Diferensial dari fungsi pangkat akar atau pecah

Jika $y = \sqrt[q]{x^q} = x^{\frac{p}{q}}$ atau $y = x^{\frac{p}{q}}$ maka

$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$

Contoh :

$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1}$

$= \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} x \sqrt[3]{x^2}$

10. Diferensial dari fungsi yaitu $= f(y)$ dimana $y = f(x)$ maka :

Bila $x = f(y)$ dimana $y = f(x)$, maka

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

Contoh :

$x = y^2 - 2$

$y^2 = x + 2$

$y = \sqrt{x+2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

11. Diferensial fungsi berantai

Jika $y = f(u)$ sedangkan $u = g(x)$ maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh :

$y = (5 + 2x)^3$

$u = 5 + 2x$

$y = u^3$

$\frac{dy}{du} = 3u^2$ dan $\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{dy}{dx} = 3u^2(2)$

$= 6u^2$

$= 6(5 + 2x)^2$

$= 6(25 + 20x + 4x^2)$

$= 150 + 120x + 24^2$

12. Diferensial dari hasil perkalian fungsi berantai

$y = U.V$

Jika $u = f(s)$ dan $s = g(x)$ serta

$v = h(t)$ dan $t = i(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = U \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} + V \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$$

Contoh :

1. $y = (5 - 3x)^3 (2x^2 + 5x)^2$

$U = (5 - 3x)^3$ dan $\mathrm{s} = 5 - 3x \quad \rightarrow U = s^3$

$V = (2x^2 + 5x)^2$ dan $\mathrm{t} = 2x^2 + 5x \quad \rightarrow V = t^2$

$\frac{ds}{dx} = -3$ $\quad\quad$ $\frac{dt}{dx} = 4x + 5$

$\frac{du}{ds} = 3s^2$ $\quad\quad$ $\frac{dv}{dt} = 2t$

$$\frac{dy}{dx} = U\,\frac{dv}{dt}.\frac{dt}{dx} + V\,\frac{du}{ds}.\frac{ds}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = s^3(2t)(4x + 5) + t^2(3s^2)(-3)$$

$$= (5 - 3x)^3 2(2x^2 + 5x)(4x + 5) +$$
$$(2x^2 + 5x)^2 3(5 - 3x)^2)(-3)$$

$$= 2(5 - 3x)^3(2x^2 + 5x)(4x + 5)$$
$$-9(2x^2 + 5x)^2(5 - 3x)^2)$$

13. Diferensial dari suatu fungsi logaritma

Jika $y = x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log e$

Contoh :

1. $y = \log 2x$

2. $y = \log 3x^3$

Jawab :

1. $y = \log 2x$

$y = \log 2 + \log x$. Diketahui $\log 2 = 0{,}3010$

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (0{,}3010 + \log x)$

$= 0 + \lim_{\Delta x \to 0}$

$= \frac{1}{x} \log e$

Jawab :

2. $y = \log 3x^3$

$y = \log 3 + \log x^3$. Diketahui $\log 3 = 0{,}4771$

$y = \log 3 + 3 \log x$

$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (0{,}4771 + 3\log x)$

$= 0 + \lim_{\Delta x \to 0} (3 \log x)$

$= \frac{3}{x} \log e$

BAB 5
MAKSIMUM DAN MINIMUM PADA FUNGSI $\boldsymbol{Y = F(x)}$

A. Pengertian Titik Ekstrim

Titik ekstrim adalah titik dimana pertambahan fungsi mencapai yang terendah dan kemudian menurun atau sebaliknya. Titik ekstrim merupakan titik stationer. Titik ekstrim dapat berupa titi maksimum atau titik minimum.

Syarat utama titik ekstrim ini adalah diferensial (turunan) fungsinya sama dengan nol

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Ada tiga cara untuk menentukan apakah titik ekstrim tersebut adalah titik maksimum atau titik minimum.

Cara 1

Menggunakan pengertian tentang relatif maksimum atas dasar fungsi $y = f(x)$, yaitu apabila fungsi $f(x)$ tersebut mempunyai nilai yang terbesar pada $x = x_1$ dibandingkan dengan pada x yang berdekatan.

a. Jika $f(x_0 - \Delta x) \leq f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$ maka titik tersebut merupakan titik relatif maksimum.

b. Jika $f(x_0 - \Delta x) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)$ maka titik tersebut merupakan titik relatif minimum.

Cara 2

Menggunakan diferensial atau turunan pertama $f'(x) = \frac{dy}{dx}$; yaitu jika $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ mempunyai :

a. Tanda aljabar yang berubah dari positif (+) ke negatif (-) maka titik tersebut merupakan titik relatif maksimum.

b. Tanda aljabar yang berubah dari negatif (-) ke positif (+) maka titik tersebut merupakan titik relatif maksimum

Cara 3

Menggunakan diferensial atau turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ yaitu :

a. Jika $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} > 0$, maka kurvanya cembung ke atas, sehingga titik tersebut adalah retatif maksismum.

b. Jika $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, maka kurvanya cembung ke bawah, sehingga titik tersebut adalah retatif minimum.

Contoh :

Carilah titik ekstrim dari $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$ dan ujilah mana yang merupakan titik ekstrim maksimum atau minimum serta titik beloknya!

Jawab :

Syarat titik ektrim → $y' = 0$

$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0$

$\underline{3x^2-18x+24=0}$:3

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-4)(x-2) = 0$$

$x_1 = \mathbf{4} \rightarrow y = 4^3 - 9(4)^2 + 24(4) + 12 = \mathbf{28}$

$x_2 = \mathbf{2} \rightarrow y = 2 - 9(2)^2 + 24(2) + 12 = \mathbf{32}$

Jadi titik ekstrim dari fungsi tersebut adalah $A(4; 28)$ dan $B(2; 32)$

Menentukan titik ekstrim maksimum dan titik ekstrim minimum :

Cara 1 :

Uji titik $A(4; 28)$

$x = 4, y = 28$

Kita gunakan $\Delta x = 0{,}5$ (ditentukan sendiri)

Sehingga

$(x - \Delta x) = (4 - 0{,}5) = 3{,}5$

$(3{,}5)^3 - 9(3{,}5)^2 + 24(3{,}5) + 12 = 28{,}625$

$(x + \Delta x) = (4 + 0{,}5) = 4{,}5$

$(4{,}5)^3 - 9(4{,}5)^2 + 24(4{,}5) + 12 = 28{,}875$

$$28{,}625 \geq 28 \leq 28{,}875$$

$\left(f(x_0 - \Delta x) \geq f(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)\right)$

Maka titik A (4;28) merupakan titik ekstrim minimum.

Uji titik B$(2;32)$

$x = 2, y = 32$

Kita gunakan $\Delta x = 0{,}5$ (ditentukan sendiri)

Sehingga

$(x - \Delta x) = (2 - 0{,}5) = 1{,}5$

$(1{,}5)^3 - 9(1{,}5)^2 + 24(1{,}5) + 12 = 31{,}125$

$(x + \Delta x) = (2 + 0{,}5) = 2{,}5$

$(2{,}5)^3 - 9(2{,}5)^2 + 24(2{,}5) + 12 = 31{,}375$

$$31{,}125 \leq 32 \geq 31{,}375$$

$\big(f(x_0 - \Delta x) \leq f(x_0) \geq\ f(x_0 + \Delta x)\big)$

Maka titik B (2;32) merupakan titik ekstrim maksimum.

Menentukan titik ekstrim maksimum dan titik ekstrim minimum :

Cara 2 :

Uji titik $A(4; 28)$

$x = 4, y = 28$

Kita gunakan $\Delta x = 0{,}5$ (ditentukan sendiri)

Sehingga

$(x - \Delta x) = (4 - 0{,}5) = 3{,}5$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$3(3{,}5)^2 - 18(3{,}5) + 24 = -2{,}25$

$(x + \Delta x) = (4 + 0{,}5) = 4{,}5$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$3(4{,}5)^2 - 18(4{,}5) + 24 = 3{,}75$

Tanda aljabar yang berubah dari negatif (-) ke positif (+) maka titik $A(4; 28)$merupakan titik ekstrim minimum.

Menentukan titik ekstrim maksimum dan titik ekstrim minimum :

Cara 3 :

Uji titik $A(4; 28)$

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$$

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$y'' = 6x - 18$$

Titik $\boldsymbol{A(4; 28)}$

$$Y'' = 6(4) - 18$$

$$= 24 - 18 = 6$$

Karena $y" = 6$ berartu $y'' > 0$, maka titik $A(4; 28)$ adalah titik ekstrim minimum.

Titik $\boldsymbol{B(2; 32)}$

$$Y'' = 6(2) - 18$$

$$= 12 - 18 = -6$$

Karena $y" = -6$ berartu $y'' < 0$, maka titik $B(2; 32)$ adalah titik ekstrim maksimum.

B. Titik Belok

Syarat mencari titik belok → $y'' = 0$

$y'' = 6x - 18$

$6x - 18 = 0$

$6x = 18$

$x = 3$

$x = 3 \rightarrow y = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$

$y = (3)^3 - 9(3)^2 + 24(3) + 12 = 30$

Jadi titik beloknya adalah $(3; 30)$.

BAB 6
INTEGRAL

A. Pengertian

Integral adalah bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu. Integral dikategorikan menjadi dua jenis :

a. Integral tak tentu (*indefinite integral*)
b. Integral tertentu (*definite integral*)

B. Integral Tak Tentu

Integral tak tentu adalah kebalikan dari deferensial, yakni suatu konsep yang berhubungan dengan proses penemuan fungsi asal apabila turunan atau derivatie dari fungsinya diketahui. Jadi yang dicari dalam integral tak tentu adalah fungsi semula karena tidak adanya interval yang diperhatikan.

Bentuk umum integral dari $f(x)$ adalah :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

Keterangan :

$\int$ = Notasi integral

$f(x)dx$ = Diferensial dari $F(x)$

$f(x)$ = Integral

$d(x)$ = Diferensial

$F(x)$ = Integral particular

$F(x) + k$ = Fungsi asal atau fungsi asli

Diferensial kita menemukan, jikamisalnya suatu fungsi asal yang dilambangkan dengan $F(x)$ dan fungsi turunannya dilambangkan dengan $f(x)$ maka:

Fungsi asal → $F(x) = x^3 + 2$

Fungsi turunan → $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 3x$

Jika proses dibalik, yakni fungsi turunan diintegralkan maka :

$$\int f(x)dx = F(x) = k = x^3 + k$$

Hasil integral tersebut adalah $x^3 + k$, disini menggantikan nilai konstanta dari contoh soal tersebut yaitu 2. Karena derivative dari konstanta adalah nol, maka dalam mengintegralkan setiap fungsi turunan konstanta k tetap dalam bentuk k. Artinya nilai konstanta tersebut tidak dengan sendirinya bisa diisi dengan bilangan tertentu, kecuali jika di dalam soal memang sudah ditentukan nilai konstantanya. Karena ketidaktentuan nilai konstanta itulah maka bentuk integral yang merupakan kebalikan dari diferensial integral tak tentu.

B.1. Rumus Integral Tak Tentu

a. Rumus penentuan

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ dimana $n \neq -1$

Contoh :

1. $\int x^4 dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + k$

$$= \frac{1}{5} x^5 + k$$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5} x^5 + k\right) = x^4$

2. $\int x^{-4}dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + k$

$= -\frac{1}{3}x^{-3} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}x^{-3} + k\right) = x^{-4}$

3. $\int dx = \frac{1}{0+1}x^{0+1} + k$

$= x + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(x + k) = 1$

b. Rumus konstanta

$\int kF(x)dx = k\int F(x)dx$

Contoh :

1. $\int 4x^3dx = \frac{1}{4}4x^4 + k$

$= x^4 + k$

2. $\int 4\ dx = 4x + k$

c. Rumus Logaritma

$\int \frac{1}{x} dx = 3\ In\ x + k$

Contoh :

1.$\int \frac{3}{x} dx = 3\ In\ x + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(3\ In + k) = \frac{3}{x}$

2. $\int \frac{3}{x+1} dx = \int 2d\ (x+1) + k$

$= 2\ In\ (x+1) + k$

d. Rumus Eksponensial

$\int e^x dx = e^x + k$

$\int e^x du = e^x + k$ dimana $u = f(x)$

Contoh :

1. $\int e^{x+4} dx = e^{x+4} d(x+4) = e^{x+4} + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}(e^{x+4} + k) = e^{x+4}$

2. $\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{2x} d(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + k$

e. Rumus Penjumlahan

$$\int \big(F(x) + G(x)\big)dx = \int F(x)dx + \int G\,(x)dx$$

Contoh :

$$\int 2x + 4 = \frac{1}{2}2x^2 + 4x + k$$

$$= x^2 + 4x + k$$

$$\int x^2 + 3x - 4 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}3x^2 - 4x + k$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + k$$

f. Rumus Substitusi

$$\int f(u)\frac{du}{dx} = \int f(u)du = F(x) + k$$

Dimana $u = g(x)$ dan $\int du$ merupakan substitusi bagi $\int dx$

Contoh :

1. $\int 6x(3x^3 - 10)dx = \int 6x\, u\frac{du}{dx}$

$$= \int u\, du$$

$$= \frac{u^{1+1}}{1+1} + k$$

$$= \frac{1}{2}u^2 + k$$

$u = 3x^3 - 10$

$\frac{1}{2}(3x^3 - 10)^2 + k$

Bukti : $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(3x^3 - 10)^2 + k\right) = \frac{2}{2}(3x^2 - 10).\, 6x$

$$= 6x(3x^2 - 10)$$

C. Integral Tertentu

Integral tertentu adalah suatu konsep yang berhubungan dengan pencarian luas suatu area yang batas-batas atau limit dari area tersebut sudah ditentukan (*dumairy*). Integral tertentu digunakan untuk menghitung luas area yang terletak diantara kurva $y = f(x)$ dan sumbu hirozontal x, dalam suatu rentangan wilayah yang dibatasi oleh $x = a$ dan $x = b$. Jadi, nilai integral tertentu yang diperoleh dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva dengan batasan-batasan tertentu.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Nilai a dan b pada bagian bawah dan atas tanda integral disebut sebagai batas-batas integral. Batas bawah integral adalah a dan batas atas integral adalah b.

C.1. Rumus Intergal Tertentu

Untuk $\boldsymbol{a < c < b}$

Rumus 1 :

$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

Contoh:

$$\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^5$$
$$= \left(\frac{1}{2}5^2\right) - \left(\frac{1}{2}4^2\right)$$
$$= 12{,}5 - 8 = 4{,}5$$

Rumus 2 :

$\int_a^b f(x)dx = 0$

Contoh :

$$\int_4^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^4$$
$$= \left(\frac{1}{2}4^2\right) - \left(\frac{1}{2}4^2\right)$$
$$= 8 - 8$$
$$= 0$$

Rumus 3 :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_4^5 x^2 dx = -\left[\frac{1}{2}x^2\right]_5^4$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{2}4^2\right) - \left(\frac{1}{2}5^2\right)\right)$$

$$= -(8 - 12{,}5)$$

$$= 4{,}5$$

Rumus 4 :

$$\int_a^b f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx =$$

Contoh :

$$\int_2^3 4x^3 dx = 4\int_2^3 x^3$$

$$= 4\left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^3$$

$$= 4.\,(20{,}25 - 4)$$

$$= 65$$

Rumus 5:

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Contoh:

$$\begin{aligned}
\int_2^3 (x^3 + 3x^2)dx &= \int_2^3 x^3 dx + \int_2^3 3x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^3 + \left[\frac{1}{3}3x^3\right]_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{4}3^4 - \frac{1}{4}2^4\right) + \left(\frac{1}{3}3.3^3 - \frac{1}{3}3.2^3\right) \\
&= (20{,}25 - 4) + (27 - 8) \\
&= 16{,}25 + 19 \\
&= 35{,}25
\end{aligned}$$

Atau

$$\begin{aligned}
\int_2^3 (x^3 + 3x^2)dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}3x^3\right]_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{4}3^4 + \frac{1}{3}3.3^3\right) - \left(\frac{1}{4}2^4 + \frac{1}{3}3.2^3\right) \\
&= (20{,}25 + 27) - (4 + 8) \\
&= 47{,}25 - 12 \\
&= 35{,}25
\end{aligned}$$

BAB 7
APLIKASI DIFERENSIAL DAN INTEGRAL DALAM EKONOMI

A. Elstisitas

Besar kecilnya perubahan jumlah yang diminta atau ditawarkan oleh konsumen akan suatu barang dapat diukur dari besarnya koefisien elastisitas. Macam-macam elastisitas yang sering digunakan untuk mengetahui tingkat perubahan jumlah yang diminta yaitu sebagai berikut :

1. Elastisitas harga
2. Elastisitas pendapatan
3. Elastisitas silang

1. Elastisitas Harga

Pengukuran tentang derajat kepekaan relatif dari jumlah barang yang diminta (ditawarkan) sebagai akibat dari adanya perubahan tingkat harga. Besarnya derajat kepekaan dari hubungan tersebut ditujukan oleh koefisien elastisitas harga. Koefisien elastisitas harga adalah perbandingan antara perbedaan relatif dari jumlah barang yang diminta (ditawarkan) dengan perubahan relatif dari harga.

Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$E_{\text{harga}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Keterangan : x= variabel kuantitas

p= variabel harga

Atau dapat disederhanakan :

$$E_{\text{harga}} = \frac{\Delta x}{x} . \frac{p}{\Delta p} \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta p} . \frac{p}{x}$$

Elastisitas harga dapat digunakan untuk mengukur derajat kepekaan perubahan jumlah barang yang diminta (ditawarkan) apabila harganya berubah. Suatu barang yang memiliki elastisitas harga lebih besar dari satu ($E_{\text{h}} > 1$) maka barang tersebut dikatakan mempunyai sifat elastis. Suatu barang yang mempunyai elastisitas kurang dari satu ($E_{\text{h}} < 1$) maka barang tersebut dikatakan mempunyai sifat yang in elastis. Suatu barang yang mempunyai elastisitas harga sama dengan satu ($E_{\text{h}} = 1$) maka barang tersebut dikatakan mempunyai sifat yang *unitary elasticity*.

Contoh :

1. Apabila harga suatu barang naik dari Rp. 1.000,00 menjadi Rp. 1.500,00 maka jumlah yang diminta turun dari 4.000 unit menjadi 3.000 unit. Berapa besarnya koefisien elastisitas harga permintaan?

Jawab :

$p_1 = 1.000$ $\qquad$ $x_1 = 4.000$

$p_2 = 1.500$ $\qquad$ $x_2 = 3.000$

$\Delta p = 1.500 - 1.000 = 500$ $\qquad$ $\Delta x = 3.000 - 4.000 = -1.000$

$$\begin{aligned} E_{\text{harga}} &= \frac{\Delta x}{\Delta p} . \frac{p}{x} \\ &= \frac{-1.000}{500} . \frac{1.000}{4.000} \\ &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Koefisien elastisitas harga permintaan sebesar -0,05 bernilai negatif. Hal ini menunjukkan bahwa apabila harga naik 1% maka jumlah yang diminta akan turun sebesar 0,5%.

2. Apabila harga suatu barang naik dari Rp. 4.000,00 menjadi Rp. 5.000,00 maka jumlah yang tawarkan turun dari 10.000 unit menjadi 15.000 unit. Berapa besarnya koefisien elastisitas harga permintaan?

Jawab :

$p_1 = 4.000$	$x_1 = 10.000$
$p_2 = 5.000$	$x_2 = 15.000$
$\Delta p = 5.000 - 4.000 = 1.000$	$\Delta x = 15.000 - 10.000 = 5.000$

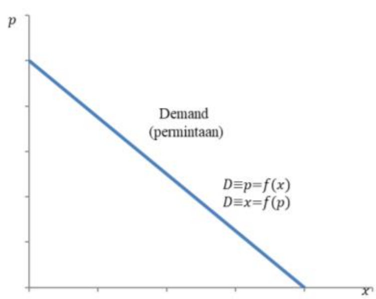
$$\begin{aligned} E_{\text{harga}} &= \frac{\Delta x}{\Delta p} . \frac{p}{x} \\ &= \frac{5.0000}{1.000} . \frac{4.000}{10.000} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Koefisien elastisitas harga penawaran sebesar 2 bernilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa apabila harga naik 1% maka jumlah yang ditawarkan naik sebesar 2%.

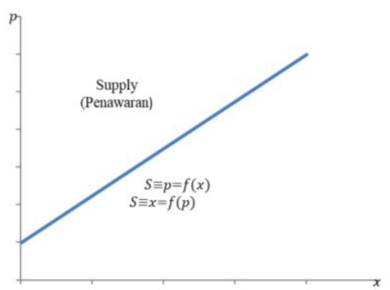
Koefisien elastisitas harga permintaan adalah negatif (-), hal ini pasti akan selalu terjadi apabila mengukur besarnya koefisien elastisitas harga permintaan. Karena dalam konsep permintaan apabila harga naik maka jumlah barang yang diminta akan turun demikian juga sebaliknya. *Slope* dari kurva permintaan akan berslope negatif dan apabila digambarkan akan terlihat turun miring dari kiri atas ke kanan bawah.

Sedangkan koefisien elastisitas harga penawaran adalah positif (+), hal ini pasti akan selalu terjadi apabila mengukur besarnya koefisien elastisitas harga penawaran. Karena dalam konsep penawaran apabila harga naik maka jumlah barang yang diditawarkan akan naik, demikian juga sebaliknya. *Slope* dari kurva permintaan akan berslope positif dan apabila digambarkan kurva akan terlihat naik miring dari kiri bawak ke kanan atas.

Dari contoh 1 tanda negatif (-) dapat diabaikan. Tanda negatif hanya menunjukkan bahwa hubungan antara perubahan harga dengan peruahan jumlah yang diminta berbanding terbalik. Elastisitas harga = 0,5 artinya jika harga naik sebesar 1% maka jumlah yang diminta turun sebasar 0,5%. Sedangkan dari contoh 2 elastisitas harga positif artinya jika harga naik sebesar 1% maka jumlah yang ditawarka akan naik sebasar 2%.



Grafik contoh 1



Grafik contoh 2

Apabila perubahan x sedemikian kecil mendekati limitnya maka dapat dinyatakan sebagai dx, dan perubahan ini menimbulkan adanya perubahan harga yang dinyatakan sebagai dp. Maka besarnya angka elastisitas harga permintaan maupun penawaran dapat diperoleh dengan rumus :

$$E_{\text{harga}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

$$E_{\text{harga}} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x}$$

Apabila $\Delta x \to 0$ $E_{\text{harga}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

Jadi elastisitas harga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$E_{\text{harga}} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

Contoh :

1. Fungsi permintaan suatu barang tertentu adalah $D \equiv p = 15 - 2x$. Berapa besarnya elastisitas harga permintaan akan barang ini pada harga 5?

Jawab :

$D \equiv p = 15 - 2x$

Apabila $p = 5$, maka $x =$

$5 = 15 - 2x$

$2x = 10$

$x = 5$

$\frac{dp}{dx} = 1. -2. x^{1-1}$

$\frac{dp}{dx} = -2$ maka $\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{2}$

Besarnya elastisitas harga permintaan akan barang ini adalah :

$$E_{\text{harga}} = \frac{p}{x} . \frac{dx}{dp}$$

$$E_{\text{harga}} = \frac{5}{5} . -\frac{1}{2}$$

$$E_{\text{harga}} = -\frac{1}{2}$$

2. Fungsi penawaran suatu barang tertentu adalah $D \equiv p = 2x + 4$. Berapa besarnya elastisitas harga penawaran akan barang ini pada harga 12?

Jawab :

$D \equiv p = 2x + 4$

Apabila $p = 12$, maka $x =$

$$12 = 2x + 4$$
$$-2x = -8$$
$$x = 4$$

$\frac{dp}{dx} = 1.2.\,x^{1-1}$

$\frac{dp}{dx} = 2$ maka $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{2}$

Besarnya elastisitas harga penawaran akan barang ini adalah :

$$E_{\text{harga}} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$
$$E_{\text{harga}} = \frac{12}{4} \cdot \frac{1}{2}$$
$$E_{\text{harga}} = 1{,}5$$

3. Fungsi permintaan dan penawaran akan suatu barang adalah $D \equiv p = 22 - 2x^2$ dan $S \equiv p = 4 + 2x$. Berapa besarnya elastisitas harga permintaan dan penawaran akan barang ini pada titik keseimbangan pasar?

Jawab :

Titik keseimbangan pasar

$D = S$

$$22 - 2x^2 = 4 + 2x$$

$$2x^2 + 2x - 18 = 0$$

$$x^2 + x - 9 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3)$$

$x = 2$ atau $x = \ -3$ (tidak dipakai)

Jika $x = 2$ maka $p = 4 + 2(2) = 16$

Jadi titik keseimbangan pasar adalah $(2; 16)$

Besarnya elastisitas harga permintaan akan barang ini pada titik keseimbangan pasar $(2; 16)$ adalah :

$D \equiv p = 22 - 2x^2$

$\frac{dp}{dx} = -4x$ maka $\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{4x}$

$E_{\text{harga}} = \frac{p}{x} . \frac{dx}{dp}$

$E_{\text{harga}} = \frac{16}{2} . -\frac{1}{4x}$

$E_{\text{harga}} = \frac{16}{2} . -\frac{1}{4.2}$

$E_{\text{harga}} = -\frac{16}{16} = -1$

Besarnya elastisitas harga penawaran akan barang ini pada titik keseimbangan pasar $(2; 16)$ adalah :

$S \equiv p = 4 + 2x$

$\frac{dp}{dx} = 2$ maka $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{2}$

$E_{\text{harga}} = \frac{p}{x} . \frac{dx}{dp}$

$E_{\text{harga}} = \frac{16}{2} . \frac{1}{2}$

$E_{\text{harga}} = \frac{16}{4} = 4$

2. Elastisitas Pendapatan

Elastsitas pendapatan adalah pengukuran tentang derajat kepekaan relatif dari jumlah barang yang diminta sebagai akibat dari adanya perubahan pendapatan. Koefisien elastisitas pendapatan menunjukkan besarnya derajat kepekaan dari hubungan tersebut. Koefisien elastisitas pendapatan merupakan perbandingan perubahan jumlah suatu barang yang diminta dengan perubahan pendapatan.

Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$E_{income} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Keterangan : x= variabel kuantitas

p= variabel pendapatan (*income*)

Atau dapat disederhanakan :

$$E_{income} = \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{p}{\Delta p}$$

$$\boldsymbol{E_{income} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x}}$$

Elastisitas pendapatan dapat digunakan untuk mengetahui jenis barang. Suatu barang yang mempunyai koefisien elastisitas pendapatan lebih besar dari satu ($E_{\text{income}} > 1$) maka barang tersebut tergolong barang mewah. Suatu barang yang mempunyai koefisien elastisitas pendapatan kurang dari satu dan lebih dari nol ($0 < E_{\text{income}} < 1$) maka barang tersebut tergolong barang kebutuhan pokok. Suatu barang yang mempunyai koefisien elastisitas pendapatan kurang dari nol ($E_{\text{income}} < 0$) maka barang tersebut tergolong barang inferior.

Contoh :

1. Apabila pendapatan seseorang yang semula Rp.25.000.000,00 per tahun naik menjadi Rp. 50.000.000,00 per tahun. Jumlah suatu barang yang diminta pada saat pendapatan Rp. 25.000.000,00 sebesar 20.000 unit per tahun dan jumlah suatu barang yang diminta pada saat pendapatan Rp. 50.000.000,00 naik menjadi sebesar 40.000 unit per tahun. Berapa besarnya koefisien elastisitas pendapatan?

Jawab :

$y_1 = Rp. 20.000.000,00 \quad x_1 = 20.000\ unit$

$y_2 = Rp. 30.000.000,00 \quad x_2 = 40.000\ unit$

$\Delta y = Rp. 10.000.000,00 \quad \Delta x = 20.000\ unit$

$$E_{income} = \frac{\Delta x}{\Delta p} . \frac{p}{x}$$

$$E_{income} = \frac{20.000}{10.000.000} . \frac{20.000.000}{20.000}$$

$$E_{income} = 2$$

2. Pendapatan masyarakat di suatu daerah pada tahun 2019 sebesar Rp. 300.000.000,00 dan jumlah yang diminta akan masker kain sebesar 300.000 unit. Pada saat pandemi covid-19 pendapatan masyarakat menurun menjadi Rp. 200.000.000,00 dengan jumlah yang diminati akan masker kain sebesar 600.000 unit. Berapa besarnya koefisien elastisitas pendapatan?

Jawab :

$$y_1 = Rp.300.000.000,00 \qquad x_1 = 300.000\ unit$$

$$y_2 = Rp.200.000.000,00 \qquad x_2 = 600.000\ unit$$

$$\Delta y = -Rp.100.000.000,00 \qquad \Delta x = 300.000\ unit$$

$$E_{income} = \frac{\Delta x}{\Delta p}.\frac{p}{x}$$

$$E_{income} = \frac{300.000}{-100.000.000}.\frac{300.000.000}{30.000}$$

$$E_{income} = -3$$

Apabila perubahan x sedemikian kecil mendekati limitnya maka dapat dinyatakan sebagai dx, dan perubahan ini menimbulkan adanya perubahan harga yang dinyatakan sebagai dp. Maka besarnya angka elastisitas pendapatan dapat diperoleh dengan rumus :

$$E_{\text{income}} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

$$E_{income} = \frac{\Delta x}{\Delta p}.\frac{p}{x}$$

Apabila $\Delta x \to 0$ $E_{income} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p}{x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

Jadi elastisitas pendapatan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{E_{income} = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}}$$

Contoh :

1. Hubungan fungsional antara tingkat pendapatan masyarakat dengan jumlah yang diminta akan suatu barang pada suatu daerah adalah $p = 2x^2 + 2.000.000$ dimana x adalah kuantitas barang dan p adalah besarnya pendapatan masyarakat. Berapa besarnya koefisien elastisitas pendapatan pada tingkat pendapatan masyarakat Rp. 10.000.000,00?

Jawab :

$$y = 2x^2 + 2.000.000$$
$$10.000.000 = 2x^2 + 2.000.000$$
$$2x^2 = 8.000.000$$
$$x^2 = 4.000.000$$
$$x = 2.000$$

$\frac{dp}{dx} = 2.2.\, x^{1-1}$

$\frac{dp}{dx} = 4x$ maka $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{4x}$

$$E_{income} = \frac{p}{x} . \frac{dx}{dp}$$
$$E_{income} = \frac{10.000.000}{2.000} . \frac{1}{4x}$$
$$E_{income} = \frac{10.000.000}{2.000} . \frac{1}{4(2.000)}$$
$$E_{income} = \frac{10.000.000}{2.000} . \frac{1}{8.000}$$
$$E_{income} = \frac{10.000.000}{16.000.000}$$
$$E_{income} = 0,625$$

2. Hubungan fungsional antara tingkat pendapatan masyarakat dengan jumlah yang diminta akan suatu barang pada suatu daerah adalah $p = x^2 - 15.000.000$ dimana x adalah kuantitas barang dan p adalah besarnya pendapatan masyarakat. Berapa besarnya koefisien elastisitas pendapatan pada tingkat pendapatan masyarakat Rp. 10.000.000,00?

Jawab :

$$p = x^2 - 6.000.000$$

$$10.000.000 = x^2 - 15.000.000$$

$$x^2 = 25.000.000$$

$$x^2 = 4.000.000$$

$$x = 5.000$$

$\frac{dp}{dx} = 2x$ maka $\frac{dx}{dp} = \frac{1}{2x}$

$$E_{\text{harga}} = \frac{p}{x} . \frac{dx}{dp}$$

$$E_{\text{harga}} = \frac{10.000.000}{5.000} . \frac{1}{2x}$$

$$E_{\text{harga}} = \frac{10.000.000}{5.000} . \frac{1}{2(2.000)}$$

$$E_{\text{harga}} = \frac{10.000.000}{20.000.000}$$

$$E_{\text{harga}} = 0{,}5$$

3. Elastisitas Silang

Elastsitas silang adalah pengukuran tentang derajat kepekaan relatif dari jumlah barang yang diminta sebagai akibat dari adanya perubahan tingkat harga barang lain yang berhubungan dengan barang tersebut. Koefisien elastisitas silang menunjukkan besarnya derajat kepekaan dari hubungan tersebut. Koefisien elastisitas silang merupakan perbandingan perubahan jumlah suatu barang yang diminta sebagai akibat dari adanya perubahan relatif dari harga barang lain yang berhubungan dengan barang tersebut.

Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$E_{silang} = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Keterangan : x= variabel kuantitas

p_2 = variabel harga

Atau dapat disederhanakan :

$$E_{\text{silang}} = \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{p}{\Delta p}$$

$$\boldsymbol{E_{\text{silang}} = \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p}{x}}$$

Elastisitas silang dapat digunakan untuk mengetahui hubungan dari kedua barang. Apabila koefisien elastisitas silang lebih besar dari nol ($E_{\text{silang}} > 0$) maka kedua barang tersebut mempunyai hubungan substansi. Apabila koefisien elastisitas silang kurang dari nol ($E_{\text{silang}} < 0$) maka kedua barang tersebut mempunyai hubungan komplementer. Apabila koefisien elastisitas silang sama dengan nol ($E_{\text{silang}} = 0$) maka kedua barang tersebut tidak mempunyai hubungan sama sekali.

Contoh :

Harga gula pasir pada suatu ketika adalah Rp. 20.000,00 per kilogram dan kemudian naik menjadi Rp. 25.000,00 per kilogram. Hal ini mengakibatkan permintaan gula batu mengalami kenaikan dari 8.000 kilogram menjadi 9.000 kilogram. Carilah koefisien elastisitas silang antara gula pasir dengan gula batu dan jelaskan interpretasinya!

Jawab :

$p_{1\ (gula\ pasir)} = Rp.20.000{,}00$ $\qquad$ $x_{1\ (gula\ batu)} = 8.000\ unit$

$p_{2\ (gula\ pasir)} = Rp.25.000{,}00$ $\qquad$ $x_{2\ ((gula\ batu)} = 9.000\ unit$

$\Delta p = Rp.5.000{,}00$ $\qquad$ $\Delta x = 1.000\ unit$

$$E_{silang} = \frac{\Delta x}{\Delta p}.\frac{p}{x}$$

$$E_{silang} = \frac{1.000}{5.000}.\frac{20.000}{8.000}$$

$$E_{silang} = 0{,}5$$

B. Biaya (*Cost*)

Biaya adalah pengeluaran yang tidak dapat dihindari untuk menghasilkan hingga memasarkan barang/jasa tertentu. Sehingga biaya total (Total *Cost*) adalah sejumlah biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi hingga memasarkan sejumlah barang atau jasa. Apabila x merupakan kuantitas barang/jasa yang diproduksi hingga dipasarkan dan TC merupakan biaya total (Total *Cost*), maka pola fungsional antara variabel biaya total dengan kuantitas adalah sebagai berikut:

$$TC = f(x)$$

Besar kecilnya biaya total ditentukan oleh banyak sedikitnya kuantitas barang/jasa yang diproduksi. Biaya total untuk memperoduksi sejumlah tertentu (x) dari suatu barang/jasa, sehingga dapat digunakan untuk memperhitungkan besarnya biaya rata-rata. Biaya rata-rata (*Average Cost*) adalah biaya per unit yang dibutuhkan untuk memproduksi suatu barang/jasa pada tingkat produksi tertentu. Biaya rata-rata kemungkinan berbeda-beda besarnya pada berbagai tingkat produksi. Tingkat produksi yang memiliki biaya rata-rata yang rendah disebut sebagai tingkat produksi optimal. Apabila AC merupakan biaya rata-rata, maka dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$AC = \frac{TC}{x}$$

Disamping biaya rata-rata, maka dengan mengetahui biaya total pada berbagai tingkat produksi dapat pula diketahui besarnya biaya marginal. Biaya marginal (*marginal cost*) adalah besarnya pertambahan biaya total yang dibutuhkan akibat pertumbuhan hasil produksi satu unit pada suatu tingkat produksi. Besarnya biaya marginal mungkin berbeda-beda pada berbagai tingkat produksi tertentu, tergantung dari bentuk fungsi atau kurve biaya totalnya.

Apabila MC atau TC' adalah biaya marginal dan ΔTC merupakan pertambahan biaya total serta Δx merupakan pertambahan kuantitas yang diproduksi, maka dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$MC \text{ atau } TC' = \frac{\Delta TC}{\Delta x}$$

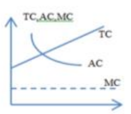
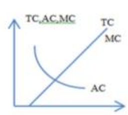
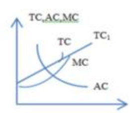
Atau apabila limit $\Delta x \rightarrow 0$, maka :

$$MC \text{ atau } TC' = \frac{dTC}{dx} = \frac{df(x)}{x}$$

Jadi biaya marginal merupakan derivatif dari fungsi biaya total. Perlu diperhatikan biaya total, biaya rata-rata dan variabel kuantitas tidak mungkin negatif, jadi harus lebih besar atau sama dengan nol ($TC \geq 0, AC \geq 0$ dan $x \geq 0$).

Pola hubungan variabel biaya total dengan variabel hasil produksi dapat berbentuk garis lurus yaitu fungsi linear, garis tidak lurus yaitu fungsi non linear antara lain fungsi kuadrat dan fungsi pangkat tiga.

Fungsi Kurva Biaya Total Garis Lurus, Kuadrat dan Pangkat Tiga

Jenis Biaya	Fungsi Linear	Fungsi Kuadrat	Fungsi Pangkat Tiga
Biaya Total (TC)	$TC = ax + b$ TC = Biaya total a = Koefisien x = Variabel Bebas b = konstanta	$TC = ax^2 + bx + c$ TC = Biaya total a, b = Koefisien x = Variabel Bebas c = konstanta	$TC = ax^3 + bx^2 + cx + d$ TC = Biaya total a, b, c = Koefisien x = Variabel Bebas d = konstanta
Biaya rata-rata (AC)	$AC = \frac{ax + b}{x}$ $AC = a + \frac{b}{x}$	$AC = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$ $AC = ax + b + \frac{c}{x}$	$AC = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x}$ $AC = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$
Biaya Marginal (MC) atau (TC')	MC atau $TC' = a$	MC atau $TC' = 2ax + b$	MC atau $TC' = 3ax^2 + 2bx + c$
Gambar			

Contoh :

1. Diketahui fungsi biaya total suatu barang adalah $TC = 2x + 4$ dimana TC merupakan variabel biaya total dan x merupakan variabel kuantitas. Carilah fungsi biaya rata-rata dan biaya marginal!

Jawab :

$$TC = 2x + 4$$
$$AC = 2 + \frac{4}{x}$$
$$MC = 2$$

2. Diketahui fungsi biaya total suatu barang adalah $TC = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{4}$ dimana TC merupakan variabel biaya total dan x merupakan variabel kuantitas. Carilah fungsi biaya rata-rata dan biaya marginal!

Jawab :

$$TC = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{4}$$
$$AC = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{4x}$$
$$MC = x + 1$$

3. Diketahui fungsi biaya total suatu barang adalah $TC = x^3 - 3x^2 + 15x + 27$ dimana TC merupakan variabel biaya total dan x merupakan variabel kuantitas. Carilah fungsi biaya rata-rata dan biaya marginal!

Jawab :

$$TC = x^3 - 3x^2 + 15x + 27$$
$$AC = x^2 - 3x + 15 + \frac{27}{x}$$
$$MC = 3x^2 - 6x + 15$$

Hasil Penerimaan Penjualan (*Revenue*)

Keuntungan (laba) yang diperoleh suatu perusahaan dapat dihitung dengan cara menghitung besarnya hasil penerimaan penjualan (*revenue*) dari produk yang diproduksi. Menghitung hasil penerimaan penjualan (*revenue*) perlu dilihat hasil penerimaan penjualan total (total *revenue*), hasil penjualan rata-rata (*average revenue*), hasil penjualan marginal (marginal *revenue*) terlebih dahulu.

Total *revenue* adalah besarnya hasil penerimaan total yang diterima oleh produsen dari penjualan sebuah produk yang diproduksinya. Besarnya hasil penerimaan total (total *revenue*) merupakan hasil perkalian antara kuantitas produk dengan harga yang terjadi karena adanya permintaan (*demand*) sedangkan TR merupakan hasil penerimaan dari penjualan produk dalam jumlah tersebut, maka formula hasil penerimaan total adalah :

$$TR = x.p = x.f(x)$$

Atau

$$TR = p.x$$

Ketika hasil penerimaan total (total *revenue*) dari penjualan sejumlah tertentu (x) suatu barang telah diketahui, maka dapat diperhitungkan besarnya hasil penerimaan rata-rata (*average revenue*). *Average Revenue* adalah hasil penerimaan per unit yang diperoleh dari penjualan suatu barang/jasa pada kuantitas tertentu.

Besarnya *average revenue* mungkin berbeda-beda pada berbagai tingkat kuantitas tergantung bentuk fungsi total *revenue*-nya. Fungsi *average revenue* diperoleh dari total *revenue* dibagi kuantitas barang/jasa yang dijual (x) merupakan fungsi permintaan, yaitu :

$$Average\ Revenue = \frac{TR}{x} = \frac{x.p}{x} = p$$

Dimana p merupakan harga permintaan dari barang tersebut.

Selain hasil penerimaan rata-rata (*average revenue*) perlu pula diketahui hasil penerimaan marginal (*marginal revenue*). *Marginal revenue* adalah besarnya hasil penerimaan (*revenue*) yang diperoleh akibat pertumbuhan penjualan suatu barang/jasa satu unit pada suatu tingkat kuantitas tertentu.

Besarnya *marginal revenue* mungkin berbeda-beda pada berbagai tingkat kuantitas , tergantung bentuk fungsi total *revenue*. Besarnya *marginal revenue* dapat diperoleh dari total *revenue* dibagi pertambahan kuantitas yang dijual. Apabila MR atau TR' adalah *marginal revenue* dan ΔTR merupakan pertambahan total *revenue* serta Δx merupakan pertambahan kuantitas yang dijual, maka dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$MR \text{ atau } TR' = \frac{\Delta TR}{\Delta x}$$

Atau apabila limit $\Delta x \to 0$, maka :

$$MC \text{ atau } TR' = \frac{dTR}{dx} = \frac{df(x)}{x}$$

Jadi *marginal revenue* merupakan derivatif dari fungsi total *revenue*. Perlu diperhatikan bahwa total *revenue* (TR), *average revenue* (AR) dan veriabel kuantitas tidak mungkin negatif, jadi harus lebih besar sama dengan nol jadi harus lebih besar atau sama dengan nol $(TR \geq 0, AR \geq 0$ dan $x \geq 0)$.

Contoh :

1. Diketahui fungsi permintaan sebuah barang adalah $D \equiv p = 12 - x^2$. Carilah fungsi total *revenue*, *average revenue* dan marginal revenue!

Jawab :

$D \equiv p = 12 - x^2$

$TR = p.x$

$TR = (12 - x^2).x$

$TR = 12x - x^3$

$AR = \frac{TR}{x}$

$AR = \frac{12x - x^3}{x}$

$AR = 12 - x^2$

$MR = TR'$

$MR = 12 - 3x^2$

2. Diketahui fungsi permintaan sebuah barang adalah $D \equiv p = 16 - 2x$. Carilah fungsi total *revenue*, *average revenue* dan marginal revenue!

Jawab :

$D \equiv p = 16 - 2x$

$TR = p.x$

$TR = (16 - 2x).x$

$TR = 16x - 2x^2$

$AR = \frac{TR}{x}$

$AR = \frac{16x - 2x^2}{x}$

$AR = 16 - 2x$

$MR = TR'$

$MR = 16 - 4x$

3. Diketahui fungsi permintaan sebuah barang adalah $D \equiv p = 4 - 2x$. Carilah fungsi total *revenue*, *average revenue* dan marginal revenue!

Jawab :

$D \equiv p = 4 - 2x$

$TR = p.x$

$TR = (4 - 2x).x$

$TR = 4x - 2x^2$

$AR = \frac{TR}{x}$

$AR = \frac{4x-2x^2}{x}$

$AR = 4 - 2x$

$MR = TR'$

$MR = 4 - 4x$

D. Analisis Keuntungan Maksimum Pada Pasar Persaingan Murni dan Pasar Monopoli

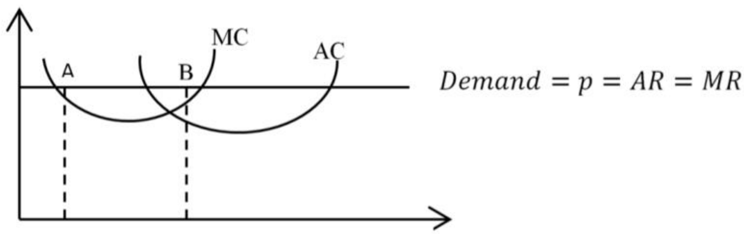
- **Keuntungan Maksimum Pada Pasar Persaingan Murni**

Pasar persaingan murni adalah suatu pasar dimana penjuala dan pembeli sangat banyak dan barang yang dijual homogen. Pasar persaingan murni merupakan pasar dimana penjual dan pembeli tidak dapat mempengaruhi harga, sehingga harga dipasar benar-benar hasil kesepakatan dan interaksi antara penjual dan pembeli.

Suatu pasar dapat dikatakan sebagai pasar persaingan murni apabila mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

1. Penjualannya banyak.
2. Barang yang dijual bersifat homogen.
3. Barang yang dijual oleh penjual merupakan bagian kecil dari seluruh barang yang ada dipasar.

Kurva fungsi permintaan pasar persaingan murni adalah mendatar (horsisontal). Grafik fungsi permintaan, fungsi biaya rata-rata (*average cost*), dan fungsi biaya marginal (*marginal cost*) dapat dilihat pada gambar 2.1 berikut ini:



Apabila p adalah harga dan x adalah kuantitas hasil (*output*), maka harga (p) pada pasar persaingan murni adalah tetap (sebesar konstanta). Apabila c adalah konstanta maka $p = c$. Sehingga secara matetatis total *revenue* (TR) adalah sebagai berikut :

$$TR = p.x \text{ atau } TR = c.x.$$

Average revenue dapat diperoleh dari total *revenue* dibagi kuantitas barang/jasa yang dijual (x). Sehingga secara matematis *average revenue* (AR) adalah sebagai berikut :

$$AR = \frac{TR}{x}$$

$$AR = \frac{p.x}{x} = p \text{ atau } AR = \frac{C.X}{X} = c$$

Marginal revenue dapat diperoleh dari diferensial total *revenue* (TR'). Sehingga secara matematis *marginal revenue* (MR) adalah sebagai berikut :

$$MR = TR' = \frac{dTR}{dx} = p + \frac{dp}{dx}$$

Harga (p) pada persaingan murni adalah tetap (sebesar konstanta) maka *marginal revenue* (MR) sama dengan p atau c. Sehingga secara matematis *marginal revenue* (MR) dapat disederhanakan menjadi seperti berikut :

$$MR = TR' = \frac{dTR}{dx} = p \text{ atau } R = TR' = \frac{dTR}{dx} = c$$

Berdasarkan penjelasan diatas menunjukkan bahwa $TR' = AR = p$ atau c, sehingga kurva permintaan bertindih dengan kurva *marginal revenue* dan *average revenue* jika digambar dalam grafik.

Apabila TC adalah biaya total (total *cost*) maka besarnya keuntungan/laba (π) yaitu :

$$\pi = TR - TC$$

Dimana $TR = f(x)$ dan $TC = g(x)$.

Laba maksimum dapat diperoleh apabila memenuhi syarat sebagai berikut :

$\pi' = \frac{d\pi}{dx} = 0$

$\pi'' = \frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

Dari persyaratan tersebut maka didapatkan:

$$\pi' = \frac{d\pi}{dx} = \frac{dTR}{dx} - \frac{dTC}{dx} = 0$$

Atau

$$\pi' = TR' - TC' = 0$$

Hal ini berarti $MR - MC = 0$ atau $MR = MC$ jadi $TR' = TC'$

$MR = MC$ atau $TR' = TC'$ terdapat dua titik pada gambar, yaitu titik A dan titik B. Untuk mengetahui titik mana yang menghasilkan keuntunga/laba maksimum maka dapat tentukan dengan syarat kedua sebagai berikut :

$\pi'' = \frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$

$\pi'' = \frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{d^2TR}{dx^2} - \frac{d^2TC}{dx^2} < 0$

$\pi'' = TR'' - TC'' < 0$

Atau

$TR'' < TC''$

Hal ini berarti bahwa tingkat pertumbuhan (*rate of increase*) dari *marginal revenue* (MR) harus lebih kecil dari tingkat pertumbuhan dari biaya *marginal* (*marginal cost* atau MC) apabila terdapat pertambahan dalam x. Dalam gambar grafik, hal ini terjadi apabila *marginal revenue* (MR) lebih menurun atau lebih kecil dari biaya *marginal* (MC) harus memotong kurva *marginal revenue* (MR) dari bawah. Dari gambar terdahulu terlihat titik A tidak memenuhi syarat, dan apa yang menjadi titik kesembangan (*equilibrium point*) yang memenuhi persyaratan tersebut adalah titik B.

Contoh :

1. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 8$ dan biaya rata-rata dari barang $AC = x^2 - 6x + 12$. Berapa besarnya kuantitas yang menghasilkan laba maksimum dan berapa besarnya laba maksimum tersebut?

Jawab :

$D \equiv p = 8$

$TR = p.x$

$TR = 8x$

$AC = x^2 - 6x + 12$

$$TC = AC.x$$
$$TC = x^3 - 6x^2 + 12x$$

Syarat laba maksimum :

$\pi' = 0$ atau $TR' = TC'$

$\pi'' < 0$ atau $TR'' = TC''$

$$TR' = 8$$
$$TC' = 3x^2 - 12x + 12$$

Syarat 1 : $\boldsymbol{TR' = TC'}$

$8 = 3x^2 - 12x + 12$

$0 = 3x^2 - 12x + 4$

$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1.2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.3.4}}{2.3}$

$x_{1.2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 48}}{6}$

$$x_{1.2} = \frac{12 \pm \sqrt{96}}{6}$$

$$x_{1.2} = \frac{12 \pm 9{,}80}{6}$$

$$x_1 = \frac{12+9{,}80}{6} \qquad x_2 = \frac{12-9{,}80}{6}$$

$$x_1 = \frac{21{,}80}{6} \qquad x_2 = \frac{2{,}20}{6}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 3,63} \qquad \boldsymbol{x_2 = 0,37}$$

Syarat 2 : *TR'' < TC''*

$x_1 = 3{,}63$

$TR'' = 0$

$TC'' = 6x - 12$

$0 < 6(3{,}63) - 12$

$0 < 21{,}78 - 12$

$0 < 9{,}78$ (memenuhi syarat)

$x_2 = 0{,}37$

$0 < 6(0{,}37) - 12$

$0 < 2{,}22 - 12$

$0 < -9{,}78$ (tidak memenuhi syarat)

Jadi besarnya kuantitas (x) yang memberikan laba maksimum adalah sebesar 3,63

Besarnya laba maksimum adalah :

$\pi = TR - TC$

$\pi = 8x - (x^3 - 6x^2 + 12x)$

$\pi = 8x - x^3 + 6x^2 - 12x)$

$\pi = -x^3 + 6x^2 - 4x$

$\pi = -3{,}63^3 + 6(3{,}63)^2 - 4(3{,}63)$

$\pi = -47{,}83 + 79{,}06 - 14{,}52$

$\pi = 16{,}71$

Jadi laba maksimum akan tercapai apabila besarnya kuantitas (x) sebesar 3,63 dan besarnya laba maksimum sebesar 16,71.

Keuntungan Maksimum Pada Pasar Monopoli

Pasar monopoli adalah suatu bentuk pasar yang hanya memiliki satu penjual dengan banyak pembeli. Suatu pasar dapat dikatakan sebagai pasar monopoli apabila mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

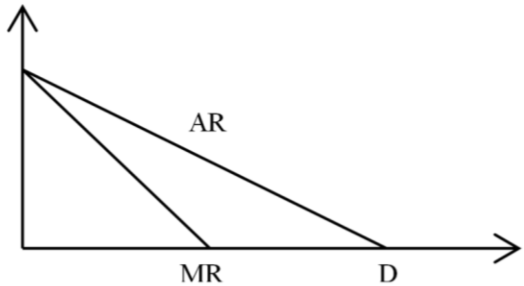
Hanya terdapat satu penjual.

Tidak ada penjual lain yang dapat menjual *output* pengganti bagi *output* yang dijual monopolis tersebut.

Ada halangan, baik bersifat alami maupun buatan, bagi perusahaan lain memasuki pasar tersebut.

Orang yang melakukan monopoli terhadap suatu pasar disebut monopolis. Monopolis dapat menentukan harga jual di pasar produk yang dihasilkannya sesuai dengan tingkat keuntungan yang ia harapkan. Apabila monopolis tersebut menginginkan jumlah *output* yang terjual lebih banyak, maka ia harus menurunkan harga jualnya. Sebaliknya, apabila monopolis tersbut menginginkan harga jual tertinggi maka jumlah *output* yang terjual lebih sedikit.

Berdasarkan penjelasan diatas maka dapat disimpulkan bahwa kurva permintaan pasar bagi produk monopolis mempunyai kemiringan negatif seperti terlihat pada gambar berikut :



Monopolis yang rasional akan selalu menghasilkan *output* dan kemudian menjualnya pada tingkat optimal. Monopolis dapat memperoleh laba maksimum atau rugi minimum apabila terpenuhinya syarat-syarat sebagai berikut :

$$\pi' = 0 \text{ atau } TR' = TC'$$

Atau laba maksimum dapat diperoleh apabila

$$MR = MC$$

$$\pi'' < 0 \text{ atau } TR'' = TC''$$

Contoh :

1. Diketahui fungsi permintan $D \equiv x = 14 - p$ dan fungsi biaya rata-rata $AC = 2x - 16 + \frac{35}{x}$. Berapa besarnya kuantitas yang menghasilkan laba maksimum dan berapa besarnya laba maksimum tersebut?

Jawab :

$$D \equiv x = 14 - p$$

$$D \equiv p = 14 - x$$

$$AC = 2x - 16 + \frac{35}{x}$$

$TR = p.x$

$TR = (14 - x).x$

$TR = 14x - x^2$

$TC = AC.x$

$TC = \left(2x - 16 + \frac{35}{x}\right).x$

$TC = 2x^2 - 16x + 35$

Syarat laba maksimum :

$\pi' = 0$ atau $TR' = TC'$

$\pi'' < 0$ atau $TR'' = TC''$

Syarat 1 : $\boldsymbol{TR' = TC'}$

$TR' = 14 - 2x$

$TC' = 4x - 16$

$14 - 2x = 4x - 16$

$-6x = -30$

$x = 5$

Syarat 2 : $\boldsymbol{TR'' < TC''}$

$TR'' = -2$

$TC'' = 4$

$-2 < 4$ (memenuhi syarat)

Jadi besarnya kuantitas (x) yang memberikan laba maksimum adalah sebesar 5

Besarnya laba maksimum adalah :

$\pi = TR - TC$

$\pi = (14x - x^2) - (2x^2 - 16x + 35)$

$\pi = -3x^2 + 30x - 35$

$\pi = -3(5)^2 + 30(5) - 35$

$\pi = -75 + 150 - 35$

$\pi = 40$

Jadi laba maksimum akan tercapai apabila besarnya kuantitas (x) sebesar 5 dan besarnya laba maksimum sebesar 40.

Pengaruh Perpajakan Pada Pasar Monopoli

Adanya pajak sebesar t per unit yang dikenakan terhadap barang yang diproduksi oleh monopolis akan menimbulkan seolah-olah biaya rata-rata meningkat sebesar t dan biaya total meningkat sebesar tx. Harga dan titik keseimbangan (*equilibrium*) baru yang dicapai dengan meksimalisasi laba, menggunakan fungsi biaya $TC_1 = TC + tx$ dimana TC_1 adalah biaya total setelah ada pajak.

Sehingga secara matetatis fungsi laba adalah sebagai berikut :

$$\pi = TR - TC_1$$
$$\pi = TR - (TC + tx)$$
$$\pi = TR - TC - tx$$

Syarat laba maksimum :

$$\pi' = TR' - TC_1' = 0$$

atau

$$TR' - TC_1'$$
$$\pi'' < 0$$

Atau

$$TR'' < TC_1''$$

Apabila pajak yang dikenakan merupakan pajak penjualan yang didasarkan pada harga yang ditetapkan kepada konsumen yaitu $t = rp$ dimana r dinyatakan dalam prosentase. Misalkan p adalah harga sebelum pajak dan p_1 adalah harga sesudah pajak, maka dapat persamaan laba dapat diformulasikan sebagai berikut :

$$p_1 = p(1 + r)$$

Harga p_1 inilah yang dimaksud dalam fungsi permintaan dalam monopoli, dan tingkat harga p yang akan terjadi tergantung hasil penerimaan monopolis. Sehingga secara matematis laba dapat dihitung sebagai berikut :

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = p.x - TC$$
$$\pi = \frac{p_1 x}{(1+r)} - TC$$

Dimana p_1 dan TC adalah fungsi dari x

Contoh :

1. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 10 - 3x$ dan biaya rata-rata $AC = 3$ dan terhadap barang ini dikenakan pajak sebesar satu per unit $(t = 1)$ pada monopolis. Berapa kuantitas barang dan harga yang dapat menghasilkan laba maksimum?

Jawab :

$$D \equiv p = 10 - 3x$$
$$TR = p.x$$
$$TR = (10 - 3x).x$$
$$TR = 10x - 3x^2$$

$AC = 3$

$TC = AC.x$

$TC = 3x$

$t = 1$

$TC_1 = TC + tx$

$TC_1 = 3x + 1x$

$TC_1 = 4x$

Syarat laba maksimum :

$\pi' = 0$ atau $TR' = TC_1'$

$\pi'' < 0$ atau $TR'' = TC_1'$

Syarat 1 : $\boldsymbol{TR' = TC_1'}$

$$TR' = 10 - 6x$$
$$TC_1' = 4$$
$$10 - 6x = 4$$
$$-6x = -6$$
$$x = 1$$

Syarat 2 : $\boldsymbol{TR'' < TC_1''}$

$$TR'' = -6$$
$$TC_1'' = 0$$

$-6 < 0$ (memenuhi syarat)

Jadi besarnya kuantitas (x) yang memberikan laba maksimum adalah sebesar 1.

Besarnya harga (p) untuk memperoleh laba maksimum:

$$D \equiv p = 10 - 3x$$
$$D \equiv p = 10 - 3(1)$$
$$p = 7$$

Besarnya laba maksimum adalah :

$$\pi = TR - TC_1$$
$$\pi = (10x - 3x^2) - (4x)$$
$$\pi = 6x - 3x^2$$
$$\pi = 6(1) - 3.(1)^2$$
$$\pi = 6 - 3$$
$$\pi = 3$$

Jadi laba maksimum akan tercapai apabila besarnya kuantitas (x) sebesar 1 dengan harga (p) sebesar 7 maka besarnya laba maksimum sebesar 3.

2. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 10 - 2x$ dan biaya rata-rata $AC = 2$ dan terhadap barang ini dikenakan pajak prosentase sebesar $r = 25\%$ pada monopolis. Berapa kuantitas barang dan harga yang dapat menghasilkan laba maksimum?

Jawab :

$$D \equiv p = 10 - 2x$$
$$r = 25\%$$
$$p_1 = p(1 + r)$$

$$p(1{,}25) = 10 - 2x$$
$$p = \frac{10-2x}{1{,}25}$$
$$p = 8 - 1{,}6x$$
$$TR = p.x$$
$$TR = (8 - 1{,}6x).x$$
$$TR = 8x - 1{,}6x^2$$
$$AC = 2$$
$$TC = AC.x$$
$$TC = 2x$$

Syarat laba maksimum :

$\pi' = 0$ atau $TR' = TC'$

$\pi'' < 0$ atau $TR'' = TC'$

Syarat 1 : $\boldsymbol{TR' = TC'}$

$$TR' = 8 - 3{,}2x$$
$$TC' = 2$$
$$8 - 3{,}2x = 2$$
$$-3{,}2x = -6$$
$$x = 1{,}88$$

Syarat 2 : $\boldsymbol{TR'' < TC_1''}$

$$TR'' = -3{,}2$$
$$TC'' = 0$$

$-3{,}2 < 0$ (memenuhi syarat)

Jadi besarnya kuantitas (x) yang memberikan laba maksimum adalah sebesar 1,88.

Besarnya harga (p) untuk memperoleh laba maksimum:

$$D \equiv p = 10 - 2x$$
$$D \equiv p = 10 - 2(1{,}88)$$
$$p = 6{,}24$$

Besarnya laba maksimum adalah :

$$\pi = TR - TC_1$$
$$\pi = (8x - 1{,}6x^2) - (2x)$$
$$\pi = 6x - 1{,}6x^2$$
$$\pi = 6(1{,}88) - 1{,}6.(1{,}88)^2$$
$$\pi = 11{,}28 - 5{,}66$$
$$\pi = 5{,}62$$

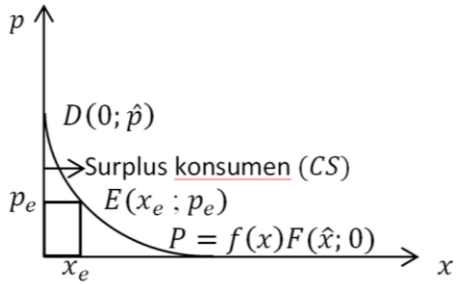
Jadi laba maksimum akan tercapai apabila besarnya kuantitas (x) sebesar 1,88 dengan harga (p) sebesar 6,24 maka besarnya laba maksimum sebesar 5,62.

Consumer's Surplus

Surplus konsumen (*consumer's surplus*) menceriminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh konsumen tertentu berkenaan dengan tingkat harga pasar suatu barang.

Surplus permintaan $p = fx$ menunjukkan kuantitas suatu barang yang akan dibeli oleh konsumen pada tingkat harga tertentu. Apabila tingkat harga pasar adalah p_e maka bagi konsumen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia membayar dengan harga lebih tinggi dari p_e hal ini merupakan keuntungan baginya, karena dia cukup membayar barang tersebut dengan harga p_e. Keuntungan lebih seperti inilah yang disebut oleh Alfred Marshall sebagai surplus konsumen.

Secara geometri besarnya surplus konsumen ditunjuukkan oleh luas area di bawah perintaan tetapi diatas tingkat harga pasar.



Surplus konsumen (CS) tak lain adalah segitiga $p_e\ DE$ dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $x = 0$ sebagai batasan bawah dan $x = x_e$ sebagai batasan atas. Secara matetatis surplus konsumen dapat dirumuskan sebagai berikut :

$CS = \int_0^{x_e} f(x)dx - x_e p_e \rightarrow$ (untuk fungsi permintaan berbentu $p = f(x)$)

$CS = \int_{p_e}^{\hat{p}} f(p)dp \rightarrow$ (untuk fungsi permintaan berbentu $x = f(p)$)

Keterangan :

p_e : Tingkat harga pasar

x_e : Kuantitas pada saat tingkat harga pasar (p_e)

$\hat{p}$: Besar harga pada saat $x = 0$

Contoh :

1. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv x = 10 - 2p$ yang tingkat harga keseimbangan pasarnya adalah sebesar 3. Hitunglah surplus konsumen dengan 2 macam cara!

Jawab :

$$D \equiv x = 10 - 2p$$
$$D \equiv p = 5 - \frac{1}{2}x$$
$$p_e = 3$$
$$D \equiv x = 10 - 2(3)$$
$$x_e = 4$$

Maka titik keseimbangan pasar $E = (4; 3)$

$$D \equiv x = 10 - 2p$$
$$x = 0 \rightarrow \hat{p} = 5$$
$$p = 0 \rightarrow x = 10$$

Cara pertama :

$CS = \int_0^{x_e} f(x)dx - x_e p_e$

$CS = \int_0^4 \left(5 - \frac{1}{2}x\right) dx - 4.3$

$CS = \left[5x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^4 - 12$

$CS = \left(\left(5.4 - \frac{1}{4}.4^2\right) - \left(5.0 - \frac{1}{4}.0\right)\right) - 12$

$CS = (16 - 0) - 12$

$\boldsymbol{CS = 4}$

Cara kedua :

$$CS = \int_{p_e}^{p} f(p)dp$$

$$CS = \int_{3}^{5} (10 - 2p)dp$$

$$CS = [10p - p^2]\,_3^5$$

$$CS = (10(5) - (5)^2) - (10(3) - (3)^2)$$

$$CS = 25 - 21$$

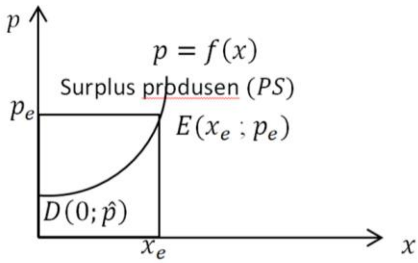
$$\boldsymbol{CS = 4}$$

Producer's surplus

Surplus produsen (*producer's surplus)* mencerminkan suatu keuntungan lebih atau surplus yang dinikmati oleh produsen berkenaan dengan tingkat harga pasar dari barang yang ditawarkan.

Fungsi penawaran $p = f(x)$ menunjukkan kuantitas suatu barang yang akan dijual oleh produsen pada tingkat tertentu. Apabila tingkat harga pasar adalah p_e maka bagi produsen tertentu yang sebetulnya mampu dan bersedia menjual dengan harga lebih rendah dari p_e hal ini merupakan keuntungan baginya, karena dia dapat menjual barang tersebut dengan harga p_e (lebih tinggi dari harga jual yang direncanakan). Keuntungan lebih seperti inilah disebut sebagai surplus produsen.

Secara geometri besarnya surplus produsen ditunjuukkan oleh luas area di bawah perintaan tetapi diatas tingkat harga pasar.



Surplus produsen (PS) tak lain adalah segitiga p_e DE dengan rentang wilayah yang dibatasi oleh $x = 0$ sebagai batasan bawah dan $x = x_e$ sebagai batasan atas. Secara matetatis surplus produsen dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$PS = x_e p_e - \int_0^{x_e} f(x)dx \rightarrow \text{(untuk fungsi permintaan berbentu } p = f(x))$$

$$PS = \int_{\hat{p}}^{p_e} f(p)dp \rightarrow \text{(untuk fungsi permintaan berbentu } x = f(p))$$

Keterangan :

p_e : Tingkat harga pasar

x_e : Kuantitas pada saat tingkat harga pasar (p_e)

$\hat{p}$: Besar harga pada saat $x = 0$

Contoh :

1. Diketahui fungsi penawaran $S \equiv p = 2x + 4$ yang tingkat harga keseimbangan pasarnya adalah sebesar 12. Hitunglah surplus produsen dengan 2 macam cara!

Jawab :

$S \equiv p = 2x + 4$

$S \equiv x = \frac{1}{2}p - 2$

$p_e = 12$

$S \equiv x = \frac{1}{2}(12) - 2$

$x_e = 4$

Maka $E = (4; 12)$

$S \equiv p = 2x + 4$

$x = 0 \rightarrow \hat{p} = 4$

$p = 0 \rightarrow x = -2$

Cara pertama :

$PS = x_e p_e - \int_0^{x_e} f(x)dx$

$PS = 4.12 - \int_0^4 (2x + 4)dx$

$PS = 48 - [x^2 + 4x]_0^4$

$PS = 48 - \left((4^2 + 4(4)) - (0^2 + 4(0))\right)$

$PS = 48 - (32 - 0)$

$\boldsymbol{PS = 16}$

Cara kedua :

$PS = \int_{\hat{p}}^{p_e} f(p)dp$

$PS = \int_{4}^{12} \left(\frac{1}{2}p - 2\right) dp$

$PS = \left[\frac{1}{4}p^2 - 2p\right]_{4}^{12}$

$PS = \left(\frac{1}{4}(12)^2 - 2(12)\right) - \left(\frac{1}{4}(4)^2 - 2(4)\right)$

$PS = 12 - (-4)$

$\boldsymbol{PS = 16}$

2. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv x = 60 - 5p$ dan fungsi penawaran $S \equiv x = -40 + 5p$. Hitunglah surplus konsumen dan surplus produsen pada titik keseimbangan pasar!

   $D \equiv x = 60 - 5p$

   $S \equiv x = -40 + 5p$

   $D = S$

   $60 - 5p = -40 + 5p$

   $10p = 100$

   $p = 10$

Jika $p = 10$ maka $x =$

$$x = 60 - 5p$$
$$x = 60 - 5.10$$
$$x = 60 - 50$$
$$x = 10$$

Jadi titik keseimbangan pasar pada E_0 (10;10)

Surplus konsumen :

$p_e = 10$ dan $x_e = 10$

$$x = 60 - 5p$$
$$x = 0 \rightarrow \hat{p} = 12$$
$$CS = \int_{p_e}^{\hat{p}} f(p)dp$$
$$CS = \int_{10}^{12} (60 - 5p\ \ )dp$$
$$CS = \left[60p - \frac{5}{2}p^2\right]_{10}^{12}$$
$$CS = \left(60.12 - \frac{5}{2}12^2\right) - \left(60.10 - \frac{5}{2}10^2\right)$$
$$CS = 360 - 350$$
$$\boldsymbol{CS = 10}$$

Surplus produsen

$p_e = 10$ dan $x_e = 10$

$x = -40 + 5p$

$x = 0 \rightarrow \hat{p} = 8$

$PS = \int_{\hat{p}}^{p_e} f(p)dp$

$PS = \int_{8}^{10} (-40 + 5p)\, dp$

$PS = \left[-40p + \frac{5}{2}p^2\right]_{8}^{10}$

$PS = \left(-40.10 + \frac{5}{2}10^2\right) - \left(-40.8 + \frac{5}{2}8^2\right)$

$PS = -150 - (-160)$

$\boldsymbol{PS = 10}$

BAB 8
MATRIKS

A. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan yang ditulis menurut baris dan kolom serta ditandai dengan tanda kurung disebelah kiri dan sebelah kanannya. Nama baris dan kolom disesuaikan dengan dengan urutannya. Vektor adalah bentuk matriks yang hanya mempunyai satu baris atau satu kolom. Matriks yang hanya mempunyai satu baris disebut vektor baris, sedangkan matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut vektor kolom.

Contoh :

Vektor kolom

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor baris

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

B. Notasi Matriks

Bentuk umum matriks berupa susunan bilangan yang diatur berdasarkan baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks atau disebut juga *elemen* atau *unsur*.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} \quad \end{Vmatrix}$$

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Keterangan :

m = Baris

n = Kolom

a_{mn} : Menyatakan elemen matriks pada baris ke-m dan kolom ke-n.

C. Ordo Matriks

Ordo matriks atau ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Jadi, suatu matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut matriks berordo $m \times n$.

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks A mempunyai 3 baris dan 4 kolom sehingga ordo matriks A adalah 3×4 atau dinotasikan $A_{3\times4}$.

D. Tranpose Suatu Matriks

Tranpose dari matriks A berordo $m \times n$ adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menukar elemen baris menjadi elemen kolom dan sebaliknya, sehingga berordo $n \times m$. Notasi transpose matriks $A_{m\times n}$ adalah $A'_{n\times m}$. Tranpose matriks A ditulis A^T, A^t atau A'. Apabila matriks A sama dengan transpose matriks A $(A = A')$ disebut sebagai matriks simetris (setangkup)

Contoh :

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks A'!

Jawab :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

---

2. Diketahui matriks B $= \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -8 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks B'!

Jawab :

$$B' = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

---

3. Diketahui matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan matriks B'!

Jawab :

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena matriks $B = B^T$, maka mariks B disebut matriks simetri.

E. Operasi Pada Matriks

1. Penjumlahan Dua Matriks

Jumlah matriks A dan B, ditulis matriks $A + B$, adalah suatu matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak dari matriks A dan B. Matriks-matriks yang berordo berbeda tidak dapat ditambahkan.

Berdasarkan pengertian di atas, dapat dikatakan bahwa dua matriks dapat dijumlahkan apabila ordonya sama. Penjumlahan dilakukan pada elemen yang seletak. Rumus penjumlahan dua matrik sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}}$$

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} + \boldsymbol{B}_{m\times n} = \boldsymbol{C}_{m\times n}$$

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Hitunglah :

a. $A + B$

b. $B + A$

Jawab :

a. $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+10 & 3+(-5) \\ 1+2 & 4+(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

b. $B + A = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10+0 & (-5)+3 \\ 2+1 & (-1)+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

2. $P = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ dan

$R = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

Hitunglah:

1. $P + Q + R$

2. $(P + Q) + R$

3. $P + (Q + R)$

Jawab :

a. $P+Q+R=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 5 & -7 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(-2)+0+3 & (-5)+3+(-3) & 1+5+4\\ 4+1+5 & 1+(-1)+(-7) & 0+(-2)+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -5 & 10\\ 10 & -7 & -1\end{bmatrix}$$

b. $(P+Q)=\begin{bmatrix}-2 & -5 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3 & 5\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}(-2)+0 & (-5)+3 & 1+5\\ 4+1 & 1+(-1) & 0+(-2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 6\\ 5 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$(P+Q)+R = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)+3 & (-2)+(-3) & 6+4 \\ 5+5 & 0+(-7) & (-2)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 10 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c.\ Q+R = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+3 & 3+(-3) & 5+4 \\ 1+\ 5 & (-1)+(-7) & (-2)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P + (Q + R) = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2) + 3 & (-5) + 0 & 1 + 9 \\ 4 + 6 & 1 + (-8) & 0 + (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 \\ 10 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh (1) dan (2) diperoleh sifat-sifat:

1. $A + B = B + A$ Komutatif
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ Asosiatif

2. Pengurangan Dua Matrks

Operasi pengurangan matriks perlu diketahui terlebih dahulu tentang lawan suatu matriks. Lawan suatu matriks A adalah matriks –A.

Contoh :

Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ maka

a. Tentukan lawan dari A

b. Hitunglah $A + (-A)$

Jawab :

a. $A = -\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

b. $A + (-A) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Hitunglah

a. $A - B$

b. $A + (-B)$

Jawab:

a. $A - B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-5) - 3 & 3 - (-1) \\ 6 - 2 & (-1) - (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

b. $-B = -\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + (-B) = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-5) + (-3) & 3 + 1 \\ 6 + (-2) & (-1) + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh (1) dan (2) dapat ditemukan sifat-sifat sebagai berikut:

1. $A + (-A) = (-A) + A = 0$ (Matriks Nol)

2. $A + 0 = 0 + A = \mathrm{A}$

3. $A + (-B) = A - B$

3. Perkalian Skalar Dengan Matriks

Apabila $A = [a_{ij}]$ adalah suatu matriks dan λ adalah suatu skalar atau bilangan nyata, maka hasil kali λA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan elemen dari A dan λ sehingga menghasilkan matriks baru $B = [b_{ij}]$ yang berordo sama.

$$\lambda A = B \text{ dimana } b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Misalkan A dan B matriks-matriks berordo $m \times n$ serta λ_1 dan λ_2 bilangan real (skalar), berlaku sifat-sifat berikut :

1. $\lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B$
2. $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
3. $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A$

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Hitunglah :

a. 2A

b. (-3)A

Jawab :

$$a. 2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 4 \\ 2\times 2 & 2\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

b. $(-3)A = -3\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-3)\times 1 & (-3)\times 4 \\ (-3)\times 2 & (-3)\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$$

4. Perkalin Matriks dengan Matriks

Dua buah matriks hanya dapat dikalikan apabila jumlah kolom dari matriks yang dikalikan sama dengan jumlah baris dari matriks pengalinya. Apabila A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$. Kalikanlah elemen-elemen yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama kemudian tambahkan hasil kali yang dihasikan.

Berdasarakan pengertian diatas, dapat dikatakan bahwa dua matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A_{m\times r}} \times \boldsymbol{B_{r\times n}} = \boldsymbol{C_{m\times n}}$$

Cara perkaliannya adalah dengan mengalikan baris matriks A dan kolom matriks B bersama-sama kemudian menambahkan hasil kali yang diperoleh.

Contoh :

1. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Hitunglah :

a. $A \times B$

b. $A \times C$

Jawab :

a. $A \times B \quad = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= [\ ((1 \times 4) \quad + \quad (4 \times 1))]$

$= [4 + 4]$

$= [8]$

b. $A \times C \quad = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= [(1 \times 5) + (4 \times 3) \quad (1 \times 6) + (4 \times 4)]$

$= [5 + 12 \quad 6 + 16]$

$= [17 \quad 22]$

2. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$;

$C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Tentukan :

a. $(AB)C$ dan $A(BC)$

b. $A(B + C)$ dan $AB + AC$

c. $(B + C)A$ dan $BA + CA$

Jawab :

a. $(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -18 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-18} \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

5. Perkalin Matriks dengan Vektor

Sebuah matriks yang bukan berbentuk vektor hanya dapat dikalikan dengan sebuah vektor kolom sehingga menghasilkan sebuah vektor kolom baru, dengan catatan jumlah kolom matriks sama dengan dimensi vektor kolom yang bersangkutan.

$$\boldsymbol{A_{m\,x\,n}}\ \mathbf{x}\ \boldsymbol{B_{n\,x\,1}} = \boldsymbol{C_{m\,x\,1}}$$

Contoh :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, maka carilah AB!

Jawab :

$$AB = \begin{bmatrix} ((-1) \times 7) + (6 \times 1) \\ (3 \times 7) + (4 \times 1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 \\ 25 \end{bmatrix}$$

F. Determinan Suatu Matriks

1. Determinan Matriks Ordo 2×2

Determinan matriks A dinotasikan "$\det A$" atau $|A|$ adalah suatu bilangan yang diperoleh dengan mengurangi hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen diagonal kedua. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & \mathrm{b} \\ c & \mathrm{d} \end{bmatrix}$ adalah matriks yang berordo 2×2 dengan elemen a dan d terletak pada diagonal utama pertama, sedangkang b dan c terletak pada diagonal kedua. Dengan demikian, dapat diperoleh rumus det A sebagai berikut.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Contoh :

Tentukan determinan mariks-matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (5 \times 3) - (2 \times 4) = 7$$

2. Determinan Matriks Ordo 3×3

Apabila $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ adalah matriks persegi berordo 3×3, determinan A dinyatakan dengan

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Ada 2 cara yang dapat digunakan untuk menentukan determinan matriks berordo 3×3, yaitu aturan *Sarus* dan metode minor-kofaktor.

a. Aturan Sarus

Determinan dengan aturan Sarrus dapat diperoleh dengan alur sebagai berikut. Misalnya, akan menghitung determinan matrik $A_{3\times3}$.Gambaran perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$= a_{11}\, a_{22}\ a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + \ a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13}$$

$$- a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{12}$$

b. Metode *Minor-Kofaktor*

Determinan juga dapat ditentukan dengan metode *minor-kofaktor*. Misalkan matriks A ditulis dengan (a_{ij}). Minor elemen a_{ij} yang dinotasikan dengan M_{ij} adalah determinan setelah elemen-elemen baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan. Misalnya, dari matriks $A_{3\times3}$ hilangkan baris ke-2 kolom ke-1 sehingga

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Akan diperoleh $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. M_{21} adalah minor dari elemen matriks A baris ke-2 kolom ke-1 atau $M_{21} = minor\ a_{21}$. Sejalan dengan itu, dapat pula memperoleh minor yang lain, misalnya

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Kofaktor elemen a_{ij}, dinotasikan K_{ij} adalah hasil kali $(-1)^{i+j}$ dengan minor elemen tersebut. Kofaktor suatu matriks dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{K_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}}$$

Matriks A di atas dapat diperoleh kofaktor, misalnya kofaktor a_{21} dan a_{13} berturut-turut adalah sebagai berikut.

$$K_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3}\, M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Kofaktor dari matriks $A_{3\times 3}$ adalah

$$\text{kof}\,(A) = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Nilai dari suatu determinan merupakan hasil penjumlahan dari perkalian elemen-elemen suatu baris (atau kolom) dengan kofaktornya. Determinan dapat dihitung dengan memilih dahulu sebuah baris (atau kolom) kemudian menggunakan aturan diatas. Perhatikan cara menentukan determinan berikut.

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Determinan matriks A dapat dihitung degan cara sebagai berikut.

Misalnya dipilih baris pertama

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}\ a_{33} - a_{32}\ a_{23}) - a_{12}(a_{21}\ a_{33} - a_{31}\ a_{23}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21}\ a_{32} - a_{31}\ a_{22}) \end{aligned}$$

$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{12}\, a_{31}\, a_{23} +$

$a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{31}\, a_{22}$

$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{31}\, a_{23} + a_{13} a_{21}\, a_{32} - a_{11}\, a_{32}\, a_{23} -$

$a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{13}\, a_{31}\, a_{22}$

Jadi dapat disimpulkan bahwa determinan A matriks ordo 3×3 yang diselesaikan dengan cara minor kofaktor hasilnya sama dengan determinan A menggunakan aturan sarrus.

Contoh :

Tentukan determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ dengan aturan Sarrus dan minor-kofaktor.

Jawab :

Cara 1: Aturan sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$= 2.1.1 + 1.1.1 + (-1).1.(-2) - 1.1.(-1) - (-2).1.2 - 1.1.1)$$

$$= 2 + 1 + 2 - (-1) - (-4) - 1$$

$$= \mathbf{9}$$

Cara 2 : Minor-kofaktor

Misalnya dipilih perhitungan menurut baris pertama sehingga diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$K_{11} = (-1)^{1+1}.3 = 3$

$K_{12} = (-1)^{1+2}.0 = 0$

$K_{13} = (-1)^{1+3}.-3 = -3$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13} \\ &= 2.3 + 1.0 + (-1).(-3) \\ &= 6 + 0 + 3 \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

G. Adjoin Matriks

Adjoin dari suatu matriks adalah ubahan dari matriks kofaktor-kofaktornya. Membentuk sebuah adjoin harus diketahui kofaktor-kofaktornya terlebih dahulu. Kofaktor dapat diperoleh apabila telah diketahui minor-minornya. Adjoin dari suatu matriks yaitu berupa sebuah matriks juga. Secara matematis adjoin dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{Adj\ A} = (\boldsymbol{kof\ A})'$$

Contoh :

Carilah adjoin dari matrik $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$!

Jawab :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Kofaktor :

$K_{11} = (-1)^{1+1}.3 = 3$

$K_{12} = (-1)^{1+2}.0 = 0$

$K_{13} = (-1)^{1+3}.-3 = -3$

$K_{21} = (-1)^{2+1}.-1 = 1$

$K_{22} = (-1)^{2+2}.3 = 3$

$K_{23} = (-1)^{2+3}.-5 = 5$

$K_{31} = (-1)^{3+1}.2 = 2$

$K_{32} = (-1)^{3+2}.3 = -3$

$K_{33} = (-1)^{3+3}.1 = 1$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = (kof\ A)'$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

H. Inverse Matriks

Dua matriks A dan B adalah matriks persegi atau matriks berordo $n \times n$ dan I_n adalah matriks identitas berordo $n \times n$. Jika $A \times B = B \times A = I_n$ maka matriks A disebut *invers* matriks *B*, sebaliknya *B* disebut *invers* matriks A. Dalam keadaan seperti ini maka dikatakan bahwa *A* dan *B* saling invers.

Matriks yang mempunyai invers apabila memiliki determinan $\neq 0$. Apabila matriks *A* mempunyai invers maka matriks *A* disebut matriks *non-singular*, sedangkan apabila *A* tidak mempunyai invers maka matriks *A* disebut matriks *singular*. Invers matriks *A* dinotasikan A^{-1} dan dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$

Contoh :

Carilah invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab :

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}}{9}$$

$$= \begin{bmatrix} {}^{1}/_{3} & {}^{1}/_{9} & {}^{2}/_{9} \\ {}^{0}/_{9} & {}^{1}/_{3} & -{}^{1}/_{3} \\ -{}^{1}/_{3} & {}^{5}/_{9} & {}^{1}/_{9} \end{bmatrix}$$

I. Penyelesaian Sistem Persamaan Liniar

a. Sistem persamaan linier dua variable

Tujuan penyelesaian sistem persamaan linier dua variable adalah menenukan nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan itu. Bentuk umum sistem persamaan linier dua variable adalah sebagai berikut :

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

Persamaan (1) dan (2) di atas dapat di susun ke dalam bentuk matriks seperti dibawah ini.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Berdasarkan penyelesaian matriks bentuk $AX = B$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Syarat $ad - bc \neq 0$.

Contoh :

Carilah nilai x dan y pada fungsi dibawah ini!

$2x + y = 7$

$x + 3y = 7$

Jawab :

Persamaan di atas dapat di susun menjadi bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Menggunakan rumus penjelas persamaan matriks di atas, di peroleh nilai x dan y sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{(2.3)-(1.1)}\right) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi nilai $x = 1$ dan $y = 2$

BAB 9
APLIKASI MATRIKS DALAM EKONOMI

A. Analisis Input – Output

Analisis masukan-keluaran merupakan suatu model matetatis untuk mengamati struktur perekonomian yang saling berkaitan antar sektor atau kegiatan ekonomi. Model ini dapat diterapkan untuk mengamati perekonomian secara makro, nasional atau regional.

Analisis masukan-keluaran ini didasarkan dari gagasan bahwa sistem perekonomian suatu Negara dapat dikelompokkan ke dalam sektor atau industri yang berbeda-beda, dengan kegiatan antar industri tersebut saling berkaitan satu sama lainnya. Setiap industri memerlukan input dari industri lainnya untuk menghasilkan output. Output dari industri tersebut juga diperlukan oleh industri lainnya sebagai input untuk menghasilkan output.

Analisis masukan-keluaran bertujuan untuk menentukan berapa banyak tingkat output dari setiap industry yang harus diproduksi dalam suatu perekonomian, supaya dapat memenuhi total permintaan terhadap produk secara pasti. Sistem perekonomian terdiri atas sejumlah sektor yang saling berkaitan satu sama lainnya. Aliran input-output dalam sistem perekonomian sering disebut model input-output. Model input-output biasanya dinyatakan dalam bentuk tabel atau secara matematis dapat berbentuk matriks.

1. Matriks Transaksi

Matriks transaksi merupakan tabel dasar dari system input-output. Matriks transaksi berisikan keterangan tentanang bagaimana output suatu sektor terdistribusi ke sektor lain sabagai input dan oleh pemakai akhir sebagai barang konsumsi. Nilai dari data yang dimasukkan ke dalam matriks transaksi adalah berupa satuan nilai dari berbagai arus ekonomi dalam suatu perekonomian selama periode tahun dasar tertentu.

Bentuk matriks transaksi dapat dibuat sebagai berikut :

Matriks Transaksi

Output (Sektor produksi) Input (Sektor pemakai)	Permintaan antara Sektor Pembeli j= 1,2, … n				Permintaan Akhir	Total Output
Sektor Produksi	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	D_1	X_1
	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	D_2	X_2
	:	:	□	:	:	:
	:	:	□	:	:	:
	x_{n1}	x_{n2}	....	x_{nn}	D_n	X_n
Input Primer	V_1	V_2	....	V_n		
Total Input	X_1	X_2	....	X_n		

Bentuk matriks transaksi dapat dibuat sebagai berikut :

Matriks Transaksi

Output (Sektor produksi) Input (Sektor pemakai)	Permintaan antara Sektor Pembeli j= 1,2, … n				Permintaan Akhir	Total Output
Sektor Produksi	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	D_1	X_1
	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	D_2	X_2
	:	:	□	:	:	:
	:	:	□	:	:	:
	x_{n1}	x_{n2}	....	x_{nn}	D_n	X_n
Input Primer	V_1	V_2	....	V_n		
Total Input	X_1	X_2	....	X_n		

Contoh:

Matriks Transaksi Perekonomian Negara ABC

Output / Input	Permintaan Antara			Permintaan Akhir	Total Output
	Pertanian	Industri	Jasa		
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Input Primer	55	125	115		
Total Input	100	290	235		

2. Matriks Koefisien Teknis

Matriks koefisien teknis dapat dihitung dengan cara membagi setiap elemen dengan total nilai kolom yang bersangkutan. Sehingga secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Contoh :

Berdasarkan contoh matrik transaksi diatas maka dapat diperoleh matrik koefisien teknis sebagai berikut :

Output / Input	Permintaan Antara		
	Pertanian	Industri	Jasa
Pertanian	0,20	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,10	0,17	0,23
Input Primer	0,55	0,43	0,48
Total Input	1,00	1,00	1,00

Nilai koefisien teknis untuk setiap elemen dapat diperoleh dari $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$, misalnya elemen $a_{11} = \frac{20}{100} =$ 0,20. Sehingga matriks koefisien teknis dapat ditulis menjadi matriks baru yang biasanya dilambangkan dengan matriks A adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Teknologi

Output yang dihasilkan harus sama dengan input dari n sektor dan juga permintaan akhir dari setiap sektor. Hal ini menunjukkan bahwa penawaran produk sama dengan permintaan. Oleh karena itu, output $X_1, X_2, \dots, X_n$ harus memenuhi persamaan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{lllll}
X_1 = x_{11} + & x_{12} + & \dots & + x_{1n} & + D_1 \\
X_2 = x_{21} + & x_{22} + & \dots & + x_{2n} & + D_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
X_n = x_{n1} + & x_{n2} + & \dots & + x_{nn} & + D_n
\end{array}
$$

Persamaan Nilai koefisien teknis untuk setiap elemen diperoleh dari $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$ sehingga dapat dirubah menjadi:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j$$

Substitusikan nilai koefisien teknis setiap elemen ke dalam persamaan tersebut, sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$
\begin{array}{lllll}
X_1 = a_{11} X_1 + & a_{12} X_2 + & \dots & + a_{1j} X_j & + D_1 \\
X_2 = a_{21} X_2 + & a_{22} X_2 + & \dots & + a_{2j} X_j & + D_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
X_n = a_{i1} X_2 + & a_{i2} X_2 + & \dots & + a_{ij} X_j & + D_n
\end{array}
$$

Seluruh variabel X pada persamaan diatas dipindah ke sisi sebelah kiri tanda sama dengan, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :

$$
\begin{array}{llllll}
X_1 - a_{11}X_1 - & a_{12}X_2 - & \ldots. & -a_{1j}X_j & = & D_1 \\
X_2 - a_{21}X_2 - & a_{22}X_2 - & \ldots. & -a_{2j}X_j & = & D_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
X_n - a_{i1}X_2 - & a_{i2}X_2 - & \ldots. & -a_{ij}X_j & = & D_n
\end{array}
$$

Apabila koefisien dari masing-masing variabel X pada persamaan diatas difaktorkan atau dengan cara mengurangkan matriks identitas dengan matriks koefisien teknis, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut :

$$
\begin{array}{llllll}
(1 - a_{11})X_1 & -a_{12}X_2 - & \ldots. & -a_{1j}X_j & = & D_1 \\
-a_{21}X_2 & (1 - a_{22})X_2 - & \ldots. & -a_{2j}X_j & = & D_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
-a_{i1}X_2 & -a_{i2}X_2 - & \ldots. & (1 - a_{ij})X_j & = & D_n
\end{array}
$$

Sistem persamaan linier dapat ditulis ke dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \dots. & -a_{1j} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \dots. & -a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots. & (1-a_{ij}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$$

Atau dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}$$

Keterangan :

$(I-A)$ = Matriks teknologi

I = Matriks identitas

A = Matriks koefisien teknis

X = Vektor output (variabel $X_1, X_2, \dots, X_n$)

D = Vektor permintaan akhir (konstanta)

Contoh :

Tentukan matrik teknologi dari contoh matriks koefisien teknis diatas !

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,20 & 0,12 & 0,02 \\ 0,15 & 0,28 & 0,26 \\ 0,10 & 0,17 & 0,23 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Koefisien Saling Ketergantungan Dan Output *X*

Matriks koefisien saling ketergantungan adalah matriks yang diperoleh dari matriks teknologi yang telah diinversikan, atau dapat dinotasikan dengan $(I - A)^{-1}$. Hal ini berawal dari analisis input-output vektor kolom untuk permintaan akhir, D biasanya diasumsikan sebagai variabel eksogen (nilai sudah ditentukan). Matriks $(I - A)$ diperoleh dari matriks identitas dikurangi dengan matriks matriks koefisien teknis.

Contoh :

Tentukan matrik koefisien saling ketergantungan dari contoh matriks teknologi diatas !

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{|(I-A)|} Adj\ (I-A)$$

$$|(I-A)| = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,12 & -0,02 \\ -0,15 & 0,72 & -0,26 \\ -0,10 & -0,17 & 0,77 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0,80 & -0,12 \\ -0,15 & 0,72 \\ -0,10 & -0,17 \end{matrix}$$

$$= 0,4435 + (-0,0031) + (-0,0005) - 0,0014 - 0,0354 - 0,0139$$

$$= 0,3892$$

$$Adj\ (I-A) = (kof\ (I-A))'$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0,72 & -0,26 \\ -0,17 & 0,77 \end{vmatrix} = 0,5544 - 0,0442 = 0,5102$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -0,15 & -0,26 \\ -0,10 & 0,77 \end{vmatrix} = -0,1155 - 0,0260 = -0,1415$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -0,15 & 0,72 \\ -0,10 & -0,17 \end{vmatrix} = 0,0255 - (-0,0720) = 0,0975$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -0,12 & -0,02 \\ -0,17 & 0,77 \end{vmatrix} = -0,0924 - 0,0034 = -0,0958$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,02 \\ -0,10 & 0,77 \end{vmatrix} = 0,6160 - 0,0020 = 0,6140$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,12 \\ -0,10 & -0,17 \end{vmatrix} = -0,1360 - 0,0120 = -0,1480$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -0,12 & -0,02 \\ 0,72 & -0,26 \end{vmatrix} = 0,0312 - (-0,0144) = 0,0456$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,02 \\ -0,15 & -0,26 \end{vmatrix} = -0,2080 - 0,0030 = -0,2110$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,12 \\ -0,15 & 0,72 \end{vmatrix} = 0,5760 - 0,0180 = 0,5580$$

$$K_{11} = (-1)^{1+1}. 0{,}5102 = 0{,}5102$$

$$K_{12} = (-1)^{1+2}. -0{,}1415 = 0{,}1415$$

$$K_{13} = (-1)^{1+3}. 0{,}0975 = 0{,}0975$$

$$K_{21} = (-1)^{2+1}. -0{,}0958 = 0{,}0958$$

$$K_{22} = (-1)^{2+2}. 0{,}6140 = 0{,}6140$$

$$K_{23} = (-1)^{2+3}. -0{,}1480 = 0{,}1480$$

$$K_{31} = (-1)^{3+1}. 0{,}0456 = 0{,}0456$$

$$K_{32} = (-1)^{3+2}. -0{,}2110 = 0{,}2110$$

$$K_{33} = (-1)^{3+3}. 0{,}5580 = 0{,}5580$$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} 0{,}5102 & 0{,}1415 & 0{,}0975 \\ 0{,}0958 & 0{,}6140 & 0{,}1480 \\ 0{,}0456 & 0{,}2110 & 0{,}5580 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = (kof\ A)'$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 0{,}5102 & 0{,}0958 & 0{,}0456 \\ 0{,}1415 & 0{,}6140 & 0{,}2110 \\ 0{,}0975 & 0{,}1480 & 0{,}5580 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{|(I-A)|} Adj\ (I-A)$$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0{,}3892}\begin{bmatrix} 0{,}5102 & 0{,}0958 & 0{,}0456 \\ 0{,}1415 & 0{,}6140 & 0{,}2110 \\ 0{,}0975 & 0{,}1480 & 0{,}5580 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}3109 & 0{,}2461 & 0{,}1172 \\ 0{,}3636 & 1{,}5776 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3803 & 1{,}4337 \end{bmatrix}$$

Vektor kolom output (X) merupakan variabel endogen (nilai diperoleh melalui penyelesaian model input-output). Sehingga nilai X dapat diperoleh dengan membagi vektor permintaan akhir dengan matriks teknologi sebagai berikut :

$$X = \frac{D}{(I-A)}$$

Operasi pembagian dalam matriks antara dua matriks tidak dapat dilakukan. Sehingga tidak bias langsung dibagikan, melainkan harus mengubah matriks penyebutnya menjadi matriks invers dan kemudian dikalikan dengan matriks pembilang sebagai berikut :

$$X = (I - A)^{-1} D$$

Contoh :

Tentukan output dari masing-masing sektor pada contoh matriks transaksi perekonomian negara ABC diatas!

$$X = (I - A)^{-1} D$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}3109 & 0{,}2461 & 0{,}1172 \\ 0{,}3636 & 1{,}5776 & 0{,}5421 \\ 0{,}2505 & 0{,}3803 & 1{,}4337 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 40 \\ 135 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99{,}7235 \\ 292{,}5720 \\ 233{,}4045 \end{bmatrix}$$

Jadi untuk memenuhi tingkat permintaan akhir maka setiap sektor harus memproduksi barang (output) sebagai berikut :

Pertanian = 99,7235

Industri = 292,5720

Jasa = 233,4045

Berdasarkan pembahasan analisis input-output diatas dapat disimpulkan bahwa untuk memperoleh tingkat keseimbangan output X untuk memenuhi permintaan antara dan permintaan akhir dalam suatu perekonomian dapat dilakukan dengan menggunakan analisis input-output. Langkah-langkah analisi input-output sebagai berikut :

1. Membuat matriks transaksi
2. Membuat matriks koefisien teknis
3. Menghitung matriks teknologi
4. Menghitung matriks koefisien saling ketergantungan dengan cara mencari invers dari matriks teknologi
5. Memperoleh nilai output X dengan cara matriks teknologi dikalikan dengan vektor permintaan akhir (D)

Contoh :

Tentukan output dari masing-masing sektor pada contoh matriks transaksi perekonomian negara ABC dibawah ini!

Matriks Transaksi Perekonomian Negara ABC

Input \ Output	Permintaan Antara			Permintaan Akhir	Total Output
	Pertanian	Industri	Jasa		
Pertanian	20	35	5	40	100
Industri	15	80	60	135	290
Jasa	10	50	55	120	235
Input Primer	55	125	115		
Total Input	100	290	235		

Matriks koefisien teknis

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

Input \ Output	Permintaan Antara		
	Pertanian	Industri	Jasa
Pertanian	0,20	0,12	0,02
Industri	0,15	0,28	0,26
Jasa	0,10	0,17	0,23
Input Primer	0,55	0,43	0,48
Total Input	1,00	1,00	1,00

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

Matriks teknologi

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}02 \\ 0{,}15 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}10 & 0{,}17 & 0{,}23 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{bmatrix}$$

Matriks koefisien saling ketergantungan

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|(I - A)|} Adj\ (I - A)$$

$$|(I - A)| = \begin{vmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}15 & 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & -0{,}17 & 0{,}77 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0{,}80 & -0{,}12 \\ -0{,}15 & 0{,}72 \\ -0{,}10 & -0{,}17 \end{matrix}$$

$$= 0{,}4435 + (-0{,}0031) + (-0{,}0005) - 0{,}0014 - 0{,}0354 - 0{,}0139$$

$$= 0{,}3892$$

$$Adj\ (I - A) = (kof\ (I - A))'$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0{,}72 & -0{,}26 \\ -0{,}17 & 0{,}77 \end{vmatrix} = 0{,}5544 - 0{,}0442 = 0{,}5102$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -0{,}15 & -0{,}26 \\ -0{,}10 & 0{,}77 \end{vmatrix} = -0{,}1155 - 0{,}0260 = -0{,}1415$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -0{,}15 & 0{,}72 \\ -0{,}10 & -0{,}17 \end{vmatrix} = 0{,}0255 - (-0{,}0720) = 0{,}0975$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -0{,}12 & -0{,}02 \\ -0{,}17 & 0{,}77 \end{vmatrix} = -0{,}0924 - 0{,}0034 = -0{,}0958$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 0{,}80 & -0{,}02 \\ -0{,}10 & 0{,}77 \end{vmatrix} = 0{,}6160 - 0{,}0020 = 0{,}6140$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0{,}80 & -0{,}12 \\ -0{,}10 & -0{,}17 \end{vmatrix} = -0{,}1360 - 0{,}0120 = -0{,}1480$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -0,12 & -0,02 \\ 0,72 & -0,26 \end{vmatrix} = 0,0312 - (-0,0144) = 0,0456$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,02 \\ -0,15 & -0,26 \end{vmatrix} = -0,2080 - 0,0030 = -0,2110$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0,80 & -0,12 \\ -0,15 & 0,72 \end{vmatrix} = 0,5760 - 0,0180 = 0,5580$$

$$K_{11} = (-1)^{1+1}.\,0,5102 = 0,5102$$
$$K_{12} = (-1)^{1+2}.-0,1415 = 0,1415$$
$$K_{13} = (-1)^{1+3}.\,0,0975 = 0,0975$$
$$K_{21} = (-1)^{2+1}.-0,0958 = 0,0958$$
$$K_{22} = (-1)^{2+2}.\,0,6140 = 0,6140$$
$$K_{23} = (-1)^{2+3}.-0,1480 = 0,1480$$
$$K_{31} = (-1)^{3+1}.\,0,0456 = 0,0456$$
$$K_{32} = (-1)^{3+2}.-0,2110 = 0,2110$$
$$K_{33} = (-1)^{3+3}.\,0,5580 = 0,5580$$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} 0,5102 & 0,1415 & 0,0975 \\ 0,0958 & 0,6140 & 0,1480 \\ 0,0456 & 0,2110 & 0,5580 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ A = (kof\ A)'$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 0,5102 & 0,0958 & 0,0456 \\ 0,1415 & 0,6140 & 0,2110 \\ 0,0975 & 0,1480 & 0,5580 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{|(I-A)|} Adj\ (I - A)$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,3892} \begin{bmatrix} 0,5102 & 0,0958 & 0,0456 \\ 0,1415 & 0,6140 & 0,2110 \\ 0,0975 & 0,1480 & 0,5580 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,3109 & 0,2461 & 0,1172 \\ 0,3636 & 1,5776 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3803 & 1,4337 \end{bmatrix}$$

Output (X) dari masing-masing sektor :

$$X = (I - A)^{-1}D$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3109 & 0,2461 & 0,1172 \\ 0,3636 & 1,5776 & 0,5421 \\ 0,2505 & 0,3803 & 1,4337 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 40 \\ 135 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99,7235 \\ 292,5720 \\ 233,4045 \end{bmatrix}$$

Jadi untuk memenuhi tingkat permintaan akhir maka setiap sektor harus memproduksi barang (output) sebagai berikut :

Pertanian = $99,7235$

Industri = $292,5720$

Jasa = $233,4045$

B. Titik Keseimbangan Pasar Dengan Matriks

Keseimbangan pasar (*market Equilibrium*) adalah suatu kondisi dimana permintaan sama dengan penawaran. Titik keseimbangan pasar merupakan titik potong fungsi permintaan dan fungsi penawaran. Titik keseimbangan pasar dapat diperoleh dengan sistem persamaan linier dua variabel.

Bentuk umum sistem persamaan linier dua variabel adalah :

$$ax + bp = r$$
$$cx + dp = s$$

Fungsi permintaan dan fungsi penawaran dirubah sesuai bentuk persamaan linear dua variabel seperti diatas. Persamaan (1) dan (2) di atas dapat di susun ke dalam bentuk matriks seperti dibawah ini.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Berdasarkan penyelesaian matriks bentuk $AX = B$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\binom{x}{p} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\binom{r}{s}$$

Syarat $ad - bc \neq 0$.

Contoh :

Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = -5x + 15.000$ dan fungsi penawaran $S \equiv p = 10x + 6.000$. Carilah titik keseimbangan pasarnya!

Jawab :

$D \equiv p = -5x + 15.000 \rightarrow 5x + p = 15.000$

$S \equiv p = 10x + 6.000 \rightarrow -10x + p = 6.000$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\binom{x}{p} = \binom{r}{s}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{p} = \begin{pmatrix} 15.000 \\ 6.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{5-(-10)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -(-10) & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15.000 \\ 6.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9.000 \\ 180.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 12.000 \end{pmatrix}$$

Jadi titik keseimbangan pasarnya adalah$E(600; 12.000)$ yaitu pada kuantitas 600 dengan harga 12.000.

TUGAS

FUNGSI

1. Gambarlah grafik dari fungsi linier dibawah ini:

   a. $y = 4 - 2x$ c. $x = 2 - y$

   b. $y = 3x + 9$ d. $x = 6 - 3y$

2. Gambarlah grafik fungsi kuadrat dibawah ini:

   a. $y = x^2 - 4x + 8$ c. $y = x^2 - 4x + 4$

   b. $x = y^2 + 2y - 8$ d. $x = y^2 - 4y + 4$

3. Gambarlah grafik fungsi pecah dibawah ini:

   a. $y = \frac{2x+3}{4x+2}$

   b. $y = \frac{3-4x}{4x-2}$

4. Carilah titik potong dari fungsi berikut dan tunjukkan titik potong tersebut kedalam grafik :

   a. $y = 10 - 2x$

      $y = 2x + 6$

   b. $x = 8 - 2y$

      $x = y - 1$

   c. $y = x^2 - 4x + 8$

      $y = 2x + 4$

   d. $y = x^2 - 4x + 4$

      $y = x + 2$

Lembar Jawab

TUGAS
APLIKASI FUNGSI LINIER

1. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 20 - 2x$, dan fungsi penawarannya $S \equiv p = 2x + 4$. Terhadap barang dikenakan pajak perunit sebesar t =2.
   a. Carilah titik kesimbangan pasar sebelum pajak
   b. Carilah titik keseimbangan pasar setelah pajak
   c. Carilah besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah.
   d. Gambarlah grafiknya
2. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 15 - 2x$, dan fungsi penawarannya $S \equiv p = x + 6$. Terhadap barang dikenakan pajak perunit sebesar r =25%.
   a. Carilah titik kesimbangan pasar sebelum pajak
   b. Carilah titik keseimbangan pasar setelah pajak
   c. Carilah besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah.
   d. Gambarlah grafiknya

3. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = 16 - 2x$, dan fungsi penawarannya $S \equiv p = x + 4$. Terhadap barang dikenakan pajak perunit sebesar s =1.
   a. Carilah titik kesimbangan pasar sebelum subsidi
   b. Carilah titik keseimbangan pasar setelah subsidi
   c. Carilah besarnya subsidi
   d. Gambarlah grafiknya

Lembar Jawab

TUGAS

APLIKASI FUNGSI KUADRAT

1. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = x^2 - 12x + 36$, dan fungsi penawarannya $S \equiv p = x^2 + 2x + 1$. Terhadap barang dikenakan pajak perunit sebesar t =5.
   a. Carilah titik kesimbangan pasar sebelum pajak
   b. Carilah titik keseimbangan pasar setelah pajak
   c. Carilah besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah.
   d. Gambarlah grafiknya
2. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = x^2 - 11x + 30$, dan fungsi penawarannya $S \equiv p = x^2 + 1$. Terhadap barang dikenakan pajak perunit sebesar t =1.
   a. Carilah titik kesimbangan pasar sebelum pajak
   b. Carilah titik keseimbangan pasar setelah pajak
   c. Carilah besarnya pajak yang ditanggung oleh konsumen, produsen serta yang diterima oleh pemerintah.
   d. Gambarlah grafiknya

Lembar Jawab

TUGAS

DIFERENSIAL

Carilah turunan ($\frac{dy}{dx}$) dari fungsi dibawah ini :

a. $y = x^2 + 5$

b. $y = (4x^2 + 2x^3)(5x + 4x^2)$

c. $y = \frac{(5-x^2)}{(4x+2)}$

d. $x = y^2 - 4$

e. $y = log4x^3$

Lembar Jawab

TUGAS

MAKSIMUM DAN MINIMUM

Carilah titik ekstrim maksimum dan titik ekstrim minimum serta titik beloknya dari fungsi dibawah ini :

a. $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 5$

b. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

c. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$

d. $y = x^3 - 3x^2 + 20$

e. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 6$

f. $y = x^3 - 15x^2 + 72x + 2$

g. $y = x^3 - 9x^2 + 48x + 4$

h. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 10$

i. $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 15$

j. $y = x^3 - 15x^2 + 48x + 2$

Lembar Jawab

TUGAS

INTEGRAL

1. Selesaikan integral berikut :
   a. $\int (x^2 + 3x)dx$
   b. $\int (3x^2 + x)dx$
   c. $\int (3x^4 + x^2)dx$
   d. $\int (5x^3 + 6x)dx$
   e. $\int (2x^3 + 3x)dx$
2. Carilah besarnya nilai dari integral berikut :
   a. $\int_3^4 (x^2 + 3x)dx$
   b. $\int_2^3 (3x^2 + x)dx$
   c. $\int_2^3 (4x^2 + 5x)dx$
   d. $\int_0^3 (3x^5 + 8x)dx$
   e. $\int_2^4 (5x^6 + 4x)dx$

Lembar Jawab

TUGAS

APLIKASI DIFERENSIAL DAN INTEGRAL DALAM EKONOMI

1. Permintaan akan suatu barang dicerminkan oleh $x = 4 - p$ dimana x melembangkan jumlah barang yang diminta dan p adalah harga per unit. Hitunglah elastisitas harga permintaannya pada tingkat harga $p = 3$ dan pada tingkat-tingkat permintaan $x = 3$.
2. Hitunglah koefisien elastisitas silang antara lemon dan teh dibawah ini :

Barang	Sebelum		Sesudah	
	P (harga)	Q(kuantitas)	P	Q
Lemon	200	100	200	200
Teh	250	100	300	100

3. Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $p = 8 - 4x$ dan fungsi biaya totalnya adalah $x^2 + 2x$. Terhadap barang ini dikenakan pajak tambahan sebesar t perunit pada si monopolis. Tentukan besarnya perubahan harga, laba maksimum dan penerimaan pemerintah dari pajak sebagai fungsi dari t.

4. Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $x = -30 + 6p$ dan fungsi penawaran suatu barang adalah $x = 60 - 3p$. Hitunglah masing-masing surplus yang diperoleh konsumen dan produsen.

Lembar Jawab

TUGAS

MATRIKS

1. Jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 10 & 11 & 12 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$
   a. Carilah $A + B$
   b. Carilah $A - B$
   c. Carilah $B - A$
   d. Carilah B+A
2. Jika $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 12 & -3 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{pmatrix}$
   a. Carilah $(A + B)'$
   b. Carilah $(A - B)'$
   c. Carilah $(B - 2A)'$
   d. Carilah $A' + B'$
3. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   a. Carilah AB
   b. Carilah $(AB)'$
   c. Carilah CA
   d. Carilah $(CA)'$

4. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ maka carilah
   a. Determinan A
   b. Adjoin A
   c. Inverse A
5. Selesaikan sistem persamaan linier dibawah ini dengan matriks :
   a. $y = 20 - 2x$
      $y = 2x + 4$
   b. $y = 15 - 2x$
      $y = x + 6$
   c. $y = 16 - 2x$
      $y = x + 4$

Lembar Jawab

TUGAS

APLIKASI FUNGSI MATRIKS DALAM EKONOMI

1. Matriks transaksi perekonomian provinsi jawa tengah tahun 2019 yang disederhanakan (dalam jutaan rupiah)

Output / Input	Permintaan Antara			Permintaan Akhir	Total Output
	Pertanian	Industri	Jasa		
Pertanian	2.593	3.563	2.090	9.420	17.666
Industri	1.585	4.072	3.064	6.566	15.287
Jasa	4.536	1.990	2.485	5.742	14.753
Input Primer	8.952	5.662	7.114		
Total Input	17.666	15.287	14.753		

   Tentukan output dari masing-masing sektor perekonomian jawa tengah!

2. Diketahui fungsi permintaan $D \equiv p = -5x + 15.000$, dan fungsi penawaran $S \equiv p = 10x + 6.000$. Tentukan titik keseimbangan pasar menggunakan matriks!

Lembar Jawab

DAFTAR PUSTAKA

Ari Sudarmi, 1991, EKONOMI MIKRO-MAKRO (Teori Soal dan Jawaban), Yogyakarta, BPFE.

Dumairy,1995, Matematika Terapan Untuk Bisnis Dan Ekonomi, Yogyakarta, BPFE UGM.

Josep B. Kalangi, 1997, Matematika Untuk Ekonomi Dan Bisnis, Yogyakarta, BPFE.

Josep B. Kalangi, 2018, Matematika Ekonomi Dan Bisnis Buku 1, Jakarta, Salemba Empat

Josep B. Kalangi, 2018, Matematika Ekonomi Dan Bisnis Buku 2, Jakarta, Salemba Empat

Judith Falicia Pattiwaell, 2001, Matematika Ekonomi, Jakarta, Salemba Empat

Sofian Assauri, 1995, Matematika Ekonomi, Jakarta, PT Raja Gafindo Persada.

FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SURAKARTA
2022

ISBN 978-623-5823-05-8